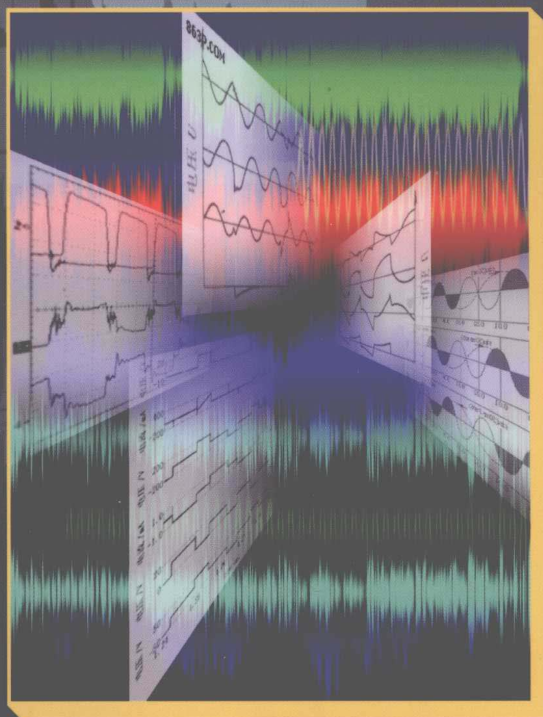
TURING 图灵电子与电气工程丛书

简明数字信号处理

姚剑清　编著



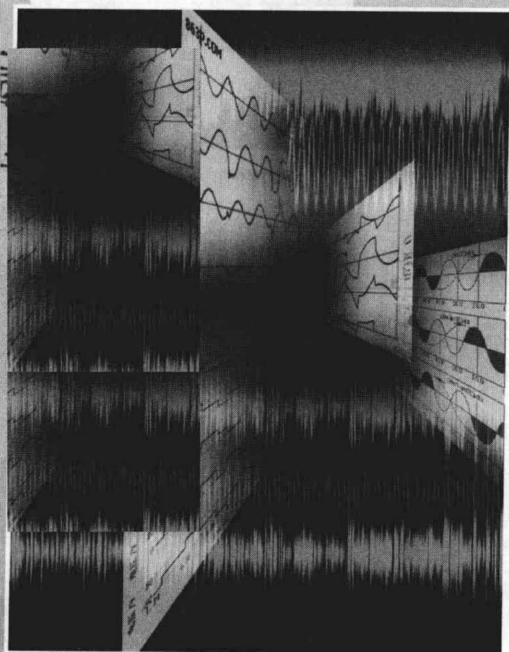


人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵电子与电气工程丛书

简明数字信号处理

姚剑清 编著



人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

简明数字信号处理/姚剑清编著. —北京：人民邮电出版社，2009.1

(图灵电子与电气工程丛书)

ISBN 978-7-115-18864-9

Ⅰ. 简… Ⅱ. 姚… Ⅲ. 数字信号-信号处理 Ⅳ. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 142667 号

内 容 提 要

数字信号处理(DSP)广泛应用于通信、电子、自动控制等方面，并日益显示出其重要性。本书旨在帮助更多的工程师掌握 DSP 的基本概念和技术。内容包含最基本和最必需的知识，从最本质的层面阐述 DSP 原理，辅以必要的数学公式，配有简明易懂的解释，并尽可能多地使用图表以辅助说明。

本书适用于软硬件研发工程师，也可供高等院校相关专业师生参考。

图灵电子与电气工程丛书

简明数字信号处理

◆ 编著　姚剑清

责任编辑　朱　巍

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号

邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn

网址　http://www.ptpress.com.cn

北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16

印张：12

字数：236 千字　2009 年 1 月第 1 版

印数：1-4 000 册　2009 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-18864-9/TN

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

前　　言

当我 25 年前开始学习 DSP(数字信号处理)的时候,DSP 处理器正处于它的第一代,那些处理器是用 N 沟 MOS 工艺制造的,封装在一个比 U 盘还大的 40 线 DIP 内,主频只有 20 MHz,做一次 16 位乘累加需要 200 ns。然而,经过 25 年的发展,DSP 处理器在速度和成本上取得了极大的进展,DSP 技术也越来越显现它的重要性。

尽管 DSP 技术取得了飞速发展,但 DSP 的原理却没有什么改变。而且,这些年的经验告诉我,DSP 原理依然还是那样不易理解。这促使我想到利用我这些年的经验去写一本简单易懂的 DSP 书,这也许对许多从事 DSP 研发的工程师会有些帮助。

为了达到上述目标,这样的一本 DSP 书必须体现下面的原则:(1)只包含最基本和最必需的内容;(2)对原理的阐述必须到达最基本的层面;(3)数学公式对于 DSP 是必不可少的,但对每个公式的推导与含义,必须有清晰的和出自最基本层面的解释,并尽可能使用图表。

以我的经验,数字信号处理的基础是模拟电子技术,而模拟电子技术的难点是对模拟信号的理解。为此,本书着重描述了作为信号最小单位的复指数信号,并把它应用于一些最基本概念的推导和说明,这包括傅里叶级数、线谱、频率响应、离散傅里叶变换等。

为了帮助理解和记忆,傅里叶级数、复指数、信号正交性、卷积等重要概念在本书中将多次出现,以便从多个侧面进行描述。比如,本书将从正余弦信号和复指数信号两个侧面叙述信号正交性的概念。

相位在信号处理中是比较难懂的。本书将着重说明相位的问题。比如,对线性相位的概念,我们用信号的时域波形解释。本书对于负频率的相位也做了比较仔细的叙述,说明在实数信号的情况下,负频率的相位是与正频率的相位互补的。我们还说明了如何把幅频响应中的负号归入相频响应的问题。

本书共分 10 章。第 1 章讲述了信号处理的预备知识,包括数学方面和连续时域方面的一些要点。这对于理解本书中的原理和概念是必需的。第 2 章,也就是本章,叙述了数字信号处理的几个侧面,以便让读者从轮廓上对 DSP 有比较完整的了解。

第 3 章和第 4 章讲述了从连续时域过渡到离散时域的全过程。其中第 3 章讲述了连续时域信号是如何用理想采样完成时域离散化的。第 4 章从连续时域的拉普拉斯变换导出 z 变换,还叙述了 z 变换的一些主要性质。当在第 4 章进入离散时域之后,z 变换就成为主要的分析工具。

第 5 章讨论了离散时域系统的主要特性，这是理解和掌握离散时域系统的最重要的内容。由于第 5 章的重要性，在接下来的第 6 章中，详细分析了 5 个非常基本的离散时域系统。所以，第 6 章的作用是对前面几章内容的一次复习，同时也有助于对后面数字滤波器和离散傅里叶变换的理解。

第 7 章讨论了数字滤波器的分析和设计，仔细讨论了相位和线性相移。在这一章的最后还叙述了如何使用 MATLAB 完成滤波器设计的过程。第 8 章中讨论的插值和抽取以及再采样和 DAC 操作也是数字信号处理的主要内容，而且是实际工作中非常需要的。

第 9 章和第 10 章讨论了离散傅里叶变换（DFT）和快速傅里叶变换（FFT）。在这两章的讨论中，主要依靠了第 1 章中详细讨论的复指数信号，因为 DFT 和 FFT 都是依靠复指数矢量来计算的。在第 9 章中，我们还认真地讨论了窗函数的特性，给出了在 DFT 和 FFT 中选用窗函数的一般性建议。在第 10 章中，我们分析了 FFT 的时域抽取法和频域抽取法，并由于使用了 A 两项式和 B 两项式，使分析变得简洁和直观。

上面这 10 章构成了数字信号处理的最基本的内容。掌握了这 10 章的基本内容，也就掌握了 DSP 的基础，具备了独立完成 DSP 开发的能力。

本书中对概念的理解方式不少是来自作者自己的经验，因而一定会有不完整的地方，恳请读者评论指正。最后，我要感谢史学晶、成璐、石小磊、李良衍和李应选等同事，他们认真阅读了全书，并提出了许多宝贵建议，指出了不少错误和不妥之处。

姚剑清

2008 年 6 月于北京

目　　录

第 1 章 信号处理预备知识

在第 1 章中，我们收集了一些理解数字信号处理所必需的基础知识，以便读者可以比较容易地阅读和理解本书中关于数字信号处理的基本原理和概念。本书所收集的内容并不追求完整性和严密性，而是讲求实用性和简洁性。

1.1 复数运算

1.1.1 复函数的定义

我们用 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 表示一个复变量，用 $W=U+\mathrm{j}V$ 表示另一个复变量，其中的 σ、ω、U、V 都是实数。如果对于复变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 的每一个值，$W=U+\mathrm{j}V$ 总有一个值或一组值与之对应，那么，W 就叫做复变量 s 的一个函数。这两个复变量之间的对应关系可以写为 $W=F(s)$。

1.1.2 直角坐标与极坐标

一个复变量可以有两种表示法：直角坐标表示法和极坐标表示法。$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 是直角坐标表示法，复变量 s 由直角坐标中实轴与虚轴上的两个实数 σ 和 ω 表示，因而也就表示为复平面上的一个点。而 $s=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 是复变量 s 的极坐标表示法，它由极坐标中的模 r 和幅角 θ 表示，其中 r 和 θ 也是两个实数。

欧拉恒等式把直角坐标表示法和极坐标表示法联系了起来：

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{j}\sin(\theta) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}=\cos(\theta)-\mathrm{j}\sin(\theta) \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，左边是极坐标形式，它的模 $r=1$，所以是一个单位复指数；右边是直角坐标形式。

欧拉恒等式也可以用图 1-1 来表示。图中的水平轴为实轴(Re)，垂直轴为虚轴(Im)。圆的半径等于 1，所以是一个单位圆。在图 1-1 中，单位复矢量 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 被分解为沿着实轴和虚轴方向上的两个矢量 $\cos(\theta)$ 和 $\mathrm{j}\sin(\theta)$。

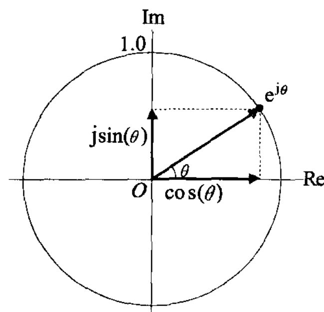


图 1-1 单位复指数与正余弦信号之间的关系

这就是欧拉恒等式的含义：一个复矢量可以分解为一对正余弦矢量，或者反过来，一对正余弦矢量可以合成为一个复矢量。

根据欧拉恒等式(1-1)，我们可以由复变量 s 的极坐标形式 $s=re^{j\theta}$ 计算出它的直角坐标形式 $s=\sigma+j\omega$：

$$\begin{cases}\sigma=r\cos(\theta)\\ \omega=r\sin(\theta)\end{cases} \tag{1-2}$$

反过来，我们也可以由 s 的直角坐标形式 $s=\sigma+j\omega$ 计算出它的极坐标形式 $s=re^{j\theta}$：

$$\begin{cases}r=\sqrt{\sigma^2+\omega^2}\\ \theta=\tan^{-1}(\omega/\sigma)\end{cases} \tag{1-3}$$

1.1.3 单值函数与多值函数

如果对于每一个 s 的值，W 只有一个值与之对应，那么 $W=F(s)$ 叫做单值函数。如果 W 有多于一个值与之对应，那么 $W=F(s)$ 叫做多值函数。

比如，$W=F(s)=3s+2$ 是一个单值函数。因为 W 可以表示为：

$$W=U+jV=3\times(\sigma+j\omega)+2=(3\sigma+2)+j3\omega \tag{1-4}$$

因此有：

$$\begin{cases}U=3\sigma+2\\ V=3\omega\end{cases} \tag{1-5}$$

对于 σ 和 ω 的一对值，只有一对 U 和 V 的值与之对应。

但是，如果函数 $F(s)$ 是一个开方运算，那么这个函数就是一个多值函数。比如，复函数 $W=F(s)=s^{1/2}$ 就是一个多值函数。为了便于分析，我们把复变量 s 表示为极坐标形式：

$$s=re^{j\theta} \tag{1-6}$$

这样就可得到：

$$W=(re^{j\theta})^{1/2} \tag{1-7}$$

由于复指数是以幅角的 2π 为周期的，即：

$$e^{j\theta}=e^{j(\theta+2k\pi)},\quad k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots \tag{1-8}$$

所以在式(1-7)中，对于 s 的一个值，W 就有两个值与之对应：

$$\begin{cases}W_1=r^{1/2}e^{j\theta/2}\\ W_2=r^{1/2}e^{j\theta/2+\pi}\end{cases} \tag{1-9}$$

其中，$r^{1/2}$ 为 r 的算术平方根。

在信号处理中求解复数方程时，也会遇到多值问题。比如，有一个复数方程

$$z^5-1=0 \tag{1-10}$$

其中，z 是一个复变量。

上式中的 1 可以写成极坐标的形式 e^{j0}。因此，式(1-10)变为：

$$z^5=e^{j0} \tag{1-11}$$

所以,方程的5个根可以写为:

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(0+2k\pi/5)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k\pi/5},\quad k=0,1,2,3,4 \tag{1-12}$$

或者写为:

$$\begin{cases} z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}=1 \\ z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/5} \\ z_3=\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi/5} \\ z_4=\mathrm{e}^{\mathrm{j}6\pi/5} \\ z_5=\mathrm{e}^{\mathrm{j}8\pi/5} \end{cases} \tag{1-13}$$

这5个根均匀地分布在单位圆上。

1.1.4 等比级数求和

假设有一个复数的等比级数 $1+z+z^2+\cdots+z^n$,如果公比 $z\neq 1$,那么这个等比级数可以表示为:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \tag{1-14}$$

上式就是等比级数的求和公式,下面证明这个公式。

我们从式(1-14)的左边开始。由于 $z\neq 1$,就可以对式(1-14)的左边乘以分式 $(1-z)/(1-z)$。把其中的两个因式的相乘展开之后,可以得到:

$$\text{式(1-14)的左边}=\frac{1+z+z^2+\cdots+z^n-z-z^2-\cdots-z^n-z^{n+1}}{1-z} \tag{1-15}$$

在上式的分子中,大多数的项都可以两两抵消。所以,上式变为:

$$\text{式(1-14)的左边}=\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \tag{1-16}$$

上式的右边就是式(1-14)的右边。我们就证明了等比级数的求和公式(1-14)。

1.2 复指数信号与负频率

在实验室中,正余弦信号(指正弦信号或余弦信号)是我们能看到的最小信号单位。但是,通过欧拉恒等式,可以把正余弦信号分解成更小的信号单元——复指数信号。欧拉恒等式(1-1)左边的 $\exp(\mathrm{j}\theta)$ 和 $\exp(-\mathrm{j}\theta)$ 就是这样的两个复指数信号。

另一方面,我们只要对式(1-1)稍做处理,就可以把一个余弦信号表示为两个复指数信号之和:

$$\cos(\omega t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2} \tag{1-17}$$

上式中,我们用 ωt 代替了式(1-1)中的 θ。

同样,我们可以把一个正弦信号表示为两个复指数信号之差:

$$\sin(\omega t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}} \tag{1-18}$$

式(1-17)和式(1-18)的右边各有两个复指数信号，它们的角频率分别是 ω 和 $-\omega$。所以，这两个复指数信号是以 $\pm\omega$ 为角频率而围绕单位圆旋转的单位复矢量。

由于 j 代表虚轴上的单位长度，因而可以用极坐标形式写为 $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$。相应地，等式(1-18)分母中的 j 就可以写为 $1/\mathrm{j}=\mathrm{j}^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$。此外，我们可以用 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$ 代替式(1-18)分子中的减号。这样之后，式(1-18)变为：

$$\sin(\omega t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{1-19}$$

上式中的两个复矢量现在变成了相加的形式。

我们来解释式(1-17)：一个余弦信号可以用两个旋转复矢量合成。我们在单位圆所在的平面上画出两个旋转方向相反的单位复矢量 v_+ 和 v_-，如图 1-2 所示。图中，$v_+=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 是正向旋转的复矢量，$v_-=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ 是反向旋转的复矢量。显然，当时间为零时，复矢量 v_+ 和 v_- 重合于实轴的正方向上。

为了图示的清晰，我们把复矢量 v_+ 和 v_- 以及合成出余弦信号的过程另外画在图 1-3中。在图 1-3 中，两个复矢量之和是一条沿着实轴方向的合成复矢量 $v_{\cos}$。由式(1-17)可知，我们需要证明 $\cos(\omega t)$ 等于合成复矢量 $v_{\cos}$ 长度的一半。为此，在图 1-3 中从复数点 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 引一条垂直于实轴的虚线 h。因此，在虚线的两侧得到两个全等的直角三角形。因为斜边长度为 1，所以每个直角三角形的底边都等于 $\cos(\omega t)$。因此，$\cos(\omega t)$ 确实等于合成复矢量 $v_{\cos}$ 长度的一半。另外，复矢量 $v_{\cos}$ 的方向是在实轴的方向上，所以，$v_{\cos}$ 是一个实数。这就验证了式(1-17)的正确性。

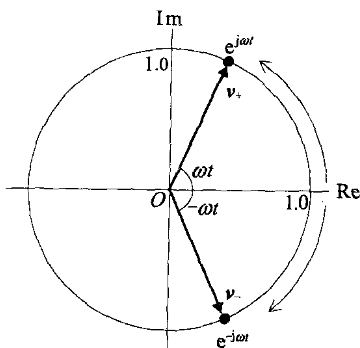


图 1-2　复平面上的两个旋转复矢量

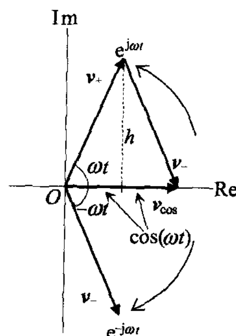


图 1-3　用两个旋转复矢量合成出一个余弦信号

我们再用图 1-4 来验证式(1-18)，也就是式(1-19)。首先由等式(1-19)可知，当时间为零时，复矢量 v_+ 和 v_- 分别位于负虚轴和正虚轴上；也就是说，图 1-4 中的两个复矢量 v_+ 和 v_- 是从虚轴开始旋转的。这与图 1-3 中 $\cos(\omega t)$ 的情况不同。假设现在的时间为 t，所以，正频率的复矢量旋转了 ωt 的弧度，负频率的复矢量旋转了 $-\omega t$ 的弧度。两个复矢量现在旋转到了图 1-4 中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ 位置上；两个复矢量之和就是图中的 $v_{\sin}$，它在实轴的方向上，所以是一个实数。而且，$v_{\sin}$ 长度的一半等于 $\sin(\omega t)$。这样，我

们也验证了式(1-18)的正确性。

现在归纳上面的验证过程：随着 t 的增长，图 1-3 和图 1-4中的两个单位复矢量 v_+ 和 v_- 同步地正反向旋转，并在旋转过程中合成出沿着实轴方向的一个余弦信号和一个正弦信号。这也就是说，一个正弦或余弦信号可以分解为两个同步反向旋转的单位复矢量 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$。这样，我们把正余弦信号与更基本的复指数信号联系了起来。

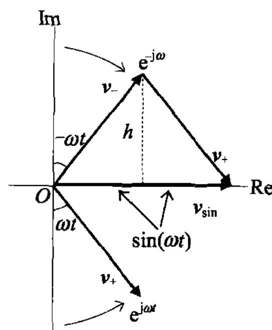


图 1-4 用两个旋转复矢量合成一个正弦信号

从式(1-17)和式(1-18)可以看出，在把一个正余弦信号分解为两个复指数信号之后，信号的频率随即扩展到了负频率的方向上。因此，负频率是与复指数信号密切相关的，所谓“负频率”就是复指数信号在负方向(顺时针方向)上的旋转。

现在用频谱的方法来表示正余弦信号、复指数和负频率之间的关系。比如，图 1-5 表示了式(1-17)中那个余弦信号的频谱。其中上图是余弦信号的幅度谱，它的两个复指数的振幅都等于 0.5；下图是余弦信号的相位谱，两个复指数的相位都等于零。所谓“相位”一般是指信号的“初始相位”，也就是 $t=0$ 时的相位。在式(1-17)和图 1-3 中，两个复指数信号都是从零相位开始旋转的。

图 1-6 表示了式(1-18)或式(1-19)中的正弦信号的频谱，它的幅度谱与余弦信号完全一样。但是，下图指出了正弦信号有不同的初始相位，它的正负两个复指数的初相分别为 $-\pi/2$ 和 $\pi/2$，这其实是式(1-19)右边的那两个复指数常量 $e^{-j\pi/2}$ 和 $e^{j\pi/2}$ 所给出的初始相位。

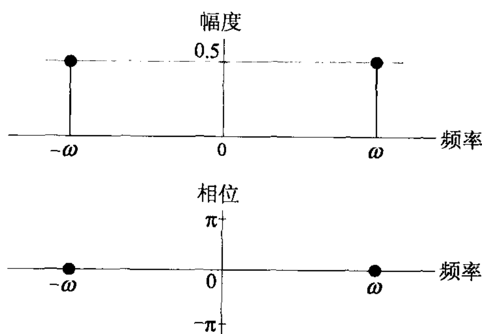


图 1-5 余弦信号的频谱

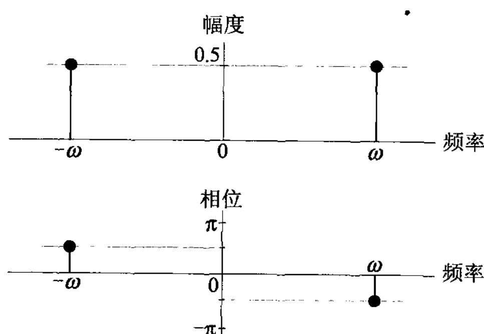


图 1-6 正弦信号的频谱

最后指出复指数信号的一个非常有用的特性：单一频率性。我们用等式(1-1)中的两个复指数信号来说明，但需要把其中的幅角 θ 改写为 ωt：

$$\begin{cases} e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t}=\cos(\omega t)-j\sin(\omega t) \end{cases} \tag{1-20}$$

这样，在式(1-20)的左边，就是两个频率相反的单位复指数信号 exp(jωt)和 exp(−jωt)。它们的频谱都是只包含一条谱线的线谱，如图 1-7 所示，而不像正余弦信号那样有两条对称的谱线。此外，两个单位复指数信号的初相都为零，所以图中没有画出。

从图 1-5 和图 1-6 可以看出，只要是实数信号，它的幅度谱一定是偶对称的，而相位谱一定是奇对称的。但图 1-7 的情况就不一样，完全没有了这种对称性，其原因是图 1-7 中的信号不是实数，而是复数。

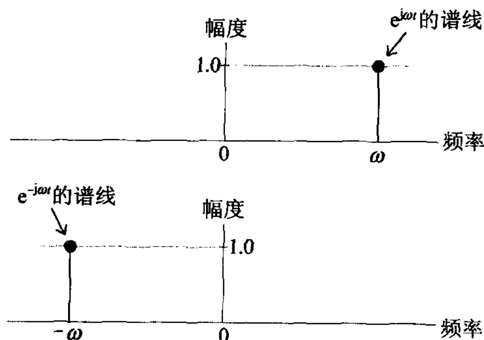


图 1-7　两个单位复指数信号的幅度谱

1.3　sinc 函数

sinc 函数是信号处理中最常见的一种函数，可以定义为：

$$\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{1-21}$$

其中，x 的取值范围是$(-\infty,\infty)$。

由式(1-21)可以看出 sinc(x)函数的大概形状。只要 x 为一个非零整数，sinc(x)的值就一定为零。当 $x=0$ 时，sinc(x)的值达到最大值 1。而且，由于式(1-21)的分子与分母都是奇函数，所以 sinc(x)是一个偶函数。此外，当 x 在正负两个方向上延伸时，分母 πx 的绝对值线性增加，而分子 sin(πx)只在做等幅振荡。因此，sinc 函数在 x 的正负方向上呈现趋于零的减幅振荡。图 1-8 画出了 sinc 函数的主要部分。由于 sinc 函数值是经常用到的，我们把函数值的主要部分列于表 1-1 中。

最后要说明的是，虽然 sinc(x)在 $x=0$ 处有一个间断点，但由于此时 sinc(x)的左右极限都等于 1，我们就可以定义 sinc(0)＝1，以去除这个间断点。此外，如果对式(1-21)右边的分式使用洛必塔法则，也能得到同样的结果。

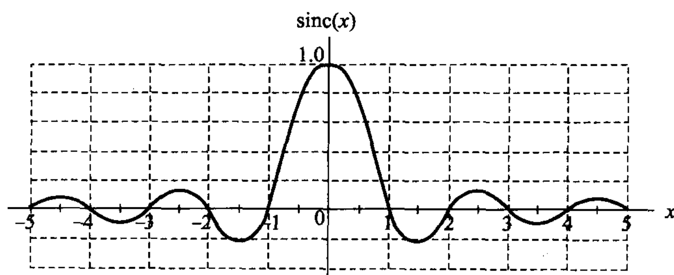


图 1-8 sinc 函数的主要部分

表 1-1 sinc 函数值

x	sinc(x)	x	sinc(x)	x	sinc(x)
0.0	1.0	1.0	0.0	3.0	0.0
0.125	0.974	1.25	−0.180	3.25	−0.069
0.25	0.900	1.5	−0.212	3.5	−0.91
0.375	0.784	1.75	−0.129	3.75	−0.60
0.5	0.637	2.0	0.0	4.0	0.0
0.625	0.471	2.25	0.100	4.25	0.053
0.75	0.300	2.5	0.127	4.5	0.071
0.875	0.139	2.75	0.082	4.75	0.047

1.4 傅里叶级数

在信号处理中，我们经常用到傅里叶级数展开的方法。如果把展开式中的正余弦函数用复指数信号表示，就可以得到复指数形式的傅里叶级数。

1.4.1 周期信号展开为傅里叶级数

把一个周期信号展开为傅里叶级数，就是把这个周期信号表示为无数个正余弦分量之和，这可以写为：

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots + b_1\sin(\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega_0 t) \end{aligned} \tag{1-22}$$

其中，$x(t)$为连续时域中的一个周期信号，如图 1-9 中那样，它的周期等于 T_0，因此，它的角频率 $\omega_0=2\pi/T_0$，一般叫做 $x(t)$的频率；在傅里叶级数展开中叫做基频，是傅里叶展开式中的最低频率(直流除外)。其他所有正余弦分量的频率都是 ω_0 的整数倍，这些

分量叫谐波分量。在式(1-22)中，我们实际上还规定了所有正余弦分量的初相都为零。

把 $x(t)$ 展开为傅里叶级数，就是求解式(1-22)中的 a_0、a_n 和 b_n 的值。在求解这些值的时候，我们利用了三角函数的正交性原理。具体地说，由于式(1-22)中的所有余弦分量和正弦分量的频率都是基频的整数倍，所以，在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内，每一个这样的正余弦分量都完成了自己的整数个周期。比如图1-10a的上面那个信号，它的频率是基频的两倍，所以，它在信号 $x(t)$ 的一个周期 $[-T_0/2, T_0/2]$ 之内完成了自己的两个周期。

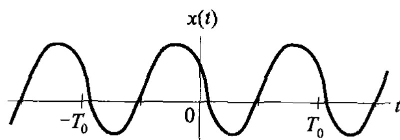


图1-9 连续时域中的一个周期信号

在"整数个周期"的前提下，就有一个关于余弦分量正交性的原理：两个相同频率的余弦分量的乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分一定大于零；而两个不同频率的余弦分量的乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分一定为零。

这可以用图1-10来说明，图中的时间 t 从 $-T_0/2$ 到 $T_0/2$，正好是 $x(t)$ 的一个周期。在图1-10a中，上面与中间这两个波形是两个频率相同的余弦分量。由于它们的频率相同，所以它们的乘积，也就是图1-10a下面的那个波形，都是正的。因此，这个乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分就一定大于零。但是，在图1-10b中，上面的波形两倍于基频，中间的波形三倍于基频。由于它们的频率不同，它们的乘积，即图1-10b中下面的波形，是正负对称的。所以，这个乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分就一定为零。这就是两个余弦分量之间的正交性。

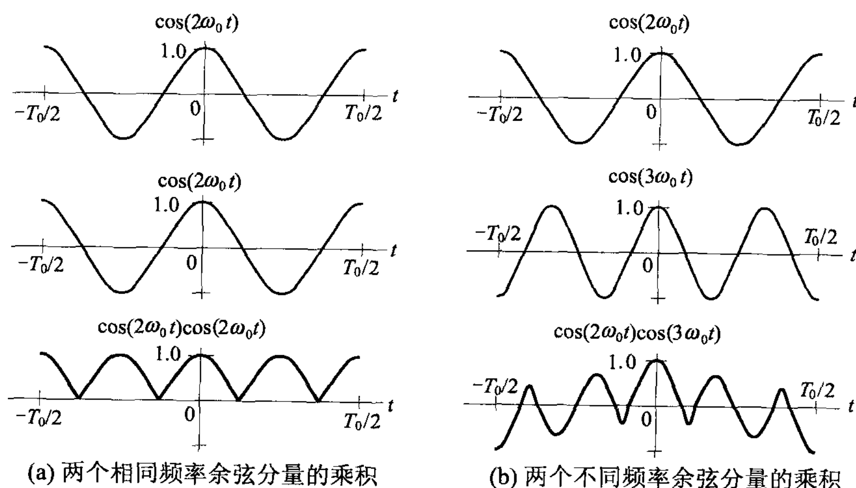


图1-10 两个整数周期的余弦分量之间的乘积波形：如果频率相同，乘积全部为正；如果频率不同，乘积正负对称

同样可以证明，在整数周期的前提下，两个正弦分量之间也存在正交性。而在正弦分量与余弦分量之间，不仅当两者频率不同时，积分等于零；当频率相同时，积分也等于零。

根据这个正交性原理，如果要计算式(1-22)傅里叶级数展开式中第 m 项余弦分量的系数 a_m，就只要对等式(1-22)两边同时乘以 $\cos(m\omega_0 t)$，并在区间$[-T_0/2, T_0/2]$内对等式两边分别积分。积分的结果是，在等式右边只有 $a_m\cos(m\omega_0 t)$这一项的积分不为零，其他所有项的积分都为零。因此，这个积分可以化简为：

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(m\omega_0 t)\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_m \cos^2(m\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{1-23}$$

上式右边的被积函数 $\cos^2(m\omega_0 t)$可以用三角恒等式变换成$[1+\cos(2m\omega_0 t)]/2$。所以，上式变为：

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(m\omega_0 t)\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_m[0.5+0.5\cos(2m\omega_0 t)]\mathrm{d}t \tag{1-24}$$

由于余弦函数的正负对称性，上式右边的余弦项 $\cos(2m\omega_0 t)$的积分一定为零。所以，上式可演算为：

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(m\omega_0 t)\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 0.5a_m\mathrm{d}t = 0.5a_m T_0 \tag{1-25}$$

因此，式(1-22)傅里叶级数中的余弦项系数 a_m为：

$$a_m = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(m\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{1-26}$$

利用相同的计算过程，可以得到展开式(1-22)中直流项系数的计算公式：

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\mathrm{d}t \tag{1-27}$$

同样可以得到式(1-22)中正弦项系数 b_m的计算公式：

$$b_m = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(m\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{1-28}$$

至此，我们导出了傅里叶级数展开式(1-22)中的直流、余弦和正弦项系数的计算公式，这也就完成了对周期函数 $x(t)$的傅里叶级数展开。

1.4.2 函数与展开式的奇偶性

我们现在来观察傅里叶级数展开式的对称性。从式(1-27)的积分式可知，如果 $x(t)$为奇函数，那么式(1-27)的积分一定等于零。因此，我们得到一个结论：如果 $x(t)$为奇函数，那么，它的傅里叶级数展开式中的直流项系数 a_0一定为零。

这个结论很容易推广到余弦项：如果 $x(t)$是一个奇函数，那么，式(1-26)中的被积函数 $x(t)\cos(m\omega_0 t)$也是一个奇函数，所以，傅里叶级数展开式中的余弦项的系数 a_m一定都为零。反之，如果 $x(t)$是一个偶函数，那么式(1-28)中的被积函数 $x(t)\sin(m\omega_0 t)$就是一个奇函数，结果是，傅里叶级数展开式中的正弦项系数 b_m都为零。

现在把奇偶性的结论归纳如下：在一个傅里叶级数展开中，如果 $x(t)$为偶函数，

那么，所有正弦分量的系数 b_m 全为零；如果 $x(t)$ 为奇数，那么，包括直流分量 a_0 在内的所有余弦分量的系数 a_m 全为零。我们用一个例子来具体说明傅里叶级数的展开过程。

例 1-1　一个周期信号 $x(t)$ 的波形如图 1-11 所示。它是一个周期等于 T_0、幅度等于 1、宽度等于 $T_0/2$ 的偶函数。要求把它展开为傅里叶级数。

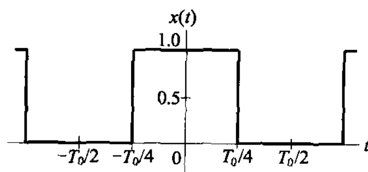


图 1-11　一个周期为 T_0 的偶函数

根据上面关于傅里叶级数奇偶性的结论，$x(t)$ 的展开式中将只有直流项和余弦项，而没有正弦项。其中的直流项 a_0 可以根据式(1-27)计算为：

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}1.0\times\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\times\frac{T_0}{2}=0.5\tag{1-29}$$

所以，$x(t)$ 的直流平均值是 0.5。从图 1-11 也可以看出 $x(t)$ 的平均值是 0.5。

傅里叶级数展开式中余弦项的系数 a_m 可以根据式(1-26)计算为：

$$\begin{aligned}a_m&=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cos(m\omega_0t)\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/4}1.0\times\cos(m\omega_0t)\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{m\omega_0T_0}\int_0^{T_0/4}\cos(m\omega_0t)\mathrm{d}(m\omega_0t)\\&=\frac{4}{m\omega_0T_0}\sin(m\omega_0t)\Big|_0^{T_0/4}\\&=\frac{\sin(m\omega_0T_0/4)}{m\omega_0T_0/4}\end{aligned}\tag{1-30}$$

由于 $\omega_0=2\pi/T_0$，所以 $\omega_0T_0=2\pi$。这样，上式可以改写为：

$$a_m=\frac{\sin(m\pi/2)}{m\pi/2}\tag{1-31}$$

根据 1.3 节中关于 sinc 函数的定义式(1.21)，上式又可写为：

$$a_m=\mathrm{sinc}(0.5\mathrm{m})\tag{1-32}$$

我们也可以按照式(1-28)来计算傅里叶展开式中正弦项的系数：

$$\begin{aligned}b_m&=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\sin(m\omega_0t)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}1.0\times\sin(m\omega_0t)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{m\omega_0T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}\sin(m\omega_0t)\mathrm{d}(m\omega_0t)\\&=\frac{2}{m\omega_0T_0}[-\cos(m\omega_0T_0/4)+\cos(-m\omega_0T_0/4)]=0\end{aligned}\tag{1-33}$$

所以，展开式中的所有正弦项系数都等于零。

我们来验证这个展开式。由表 1-1 可以查得傅里叶展开式中余弦项系数的前 5 个值 $a_m=\{0.637,0.0,-0.212,0.0,0.127\}$。$x(t)$ 的直流分量已经在式(1-29)中计算出等于 0.5。用直流项和前 5 个余弦分量可以近似地合成出 $x(t)$ 的波形，这个合成过程画在了图 1-12 中。其中，上

图是直流分量和前 5 个谐波分量的波形(二次和四次谐波分量等于零而没有画出)。下图是合成出的 $x(t)$ 的近似波形。

图中有一点值得说明:三次谐波分量的幅度等于 −0.212,但在图 1-12 的上图中,这个负号被表示为反相,即 180°的相移。所以,这个三次谐波分量被说成振幅等于 0.212,而初相等于 π 或 −π。

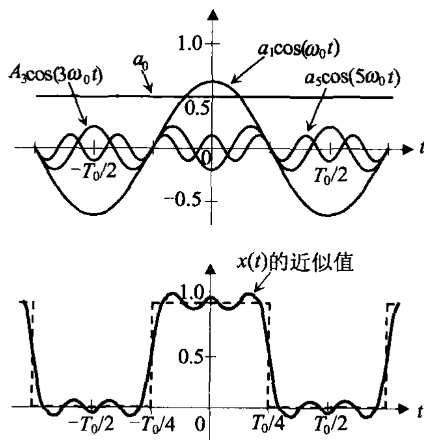


图 1-12 用直流分量和前 5 个谐波分量叠加之后可以得到近似的 $x(t)$ 波形

1.4.3 复指数形式的傅里叶级数

在 1.2 节中,我们说明了正余弦信号可以用复指数信号来表示。所以,傅里叶级数同样也可以表示为复指数形式。

在把式(1-22)中的每个正余弦分量替换成一对复指数信号之后,式(1-22)就变为:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}\right) \tag{1-34}$$

在上式中,我们把两个连加号内相同正频率的复指数项两两合并起来,再把相同负频率的复指数项两两合并起来,并注意将后一个连加运算中的 1/j 变为 −j。这样,上式可演算为:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{jb_n}{2}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \tag{1-35}$$

在上式中,用 X_0 代替 $x(t)$ 的直流分量 a_0。第一个连加运算中的各项都是负频率的复指数,用 X_{-1} 代替 $(a_1+jb_1)/2$,用 X_{-2} 代替 $(a_2+jb_2)/2$,…。对于第二个连加运算,用 X_1 代替 $(a_1-jb_1)/2$,用 X_2 代替 $(a_2-jb_2)/2$,…。这样就得到了非常简单的复指数形

式的傅里叶级数：

$$x(t)=\cdots+X_{-2}e^{-j2\omega_0 t}+X_{-1}e^{-j\omega_0 t}+X_0+X_1e^{j\omega_0 t}+X_2e^{j2\omega_0 t}+\cdots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1-36}$$

而且，只要 $x(t)$ 为实函数，X_n 与 X_{-n} 就一定互为共轭。

我们现在要做的是求解式(1-36)中的 X_n，比如，我们希望计算出第 m 项复指数分量的系数 X_m。为此，在式(1-36)两边同时乘以 $\exp(-jm\omega_0 t)$ 然后在 $x(t)$ 的一个周期内计算积分：

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=\int_{T_0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-jm\omega_0 t}dt \tag{1-37}$$

将上式右边的连加号与积分号交换顺序，并注意到 X_n 与 t 无关而可以提到积分号之前。这样，上式变为：

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\int_{T_0}e^{j(n-m)\omega_0 t}dt \tag{1-38}$$

我们把式(1-38)中的 $n-m$ 记作 k。显然，k 也是一个整数。

现在根据欧拉恒等式，把被积函数中的复指数分解为一对正余弦信号。因此，式(1-38)右边的每一个积分式都可以写为：

$$\int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}dt=\int_{T_0} e^{jk\omega_0 t}dt=\int_{T_0}\cos(k\omega_0 t)dt+j\int_{T_0}\sin(k\omega_0 t)dt \tag{1-39}$$

我们先讨论 $n\neq m$（即 $k\neq 0$）的情况。因为积分是在 $x(t)$ 的一个信号周期 T_0 内进行的，所以，积分式中的两个正余弦信号正好完成了各自的 k 个整周期。由于正余弦信号是正负面积相等的，所以式(1-39)中的两个积分式一定都是零。这就是说，式(1-38)右边的所有 $n\neq m$ 的积分项都等于零；而仅当 $n=m$ 时，积分等于 T_0。由此，式(1-38)可以化简为：

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=T_0X_m \tag{1-40}$$

由上式可以得到：

$$X_m=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt \tag{1-41}$$

式(1-41)就是复指数形式傅里叶级数的系数计算公式；其中的 X_0 为 $x(t)$ 的直流分量，X_{-1} 和 X_1 为 $x(t)$ 的两个基频复指数分量的系数；其余的 X_{-m} 和 X_m 为各谐波复指数分量的系数。这些 X_m（包括 X_{-1} 和 X_1）一般都是复数，它们的模表示复指数分量的振幅，而幅角表示复指数分量的相位。

1.5　傅里叶变换与反变换

上一节讨论的傅里叶级数展开只适用于周期信号。我们还有另外一类信号，叫做非周期信号。它们在 $(-\infty,\infty)$ 范围内只有一个脉冲波形，比如图1-13中的 $x(t)$。对

于这一类非周期信号进行频域分析，可以借用上一节的傅里叶级数展开法。具体的做法是：先把这种非周期信号看成像图 1-11 中那样的周期信号，然后令它的周期 T_0 趋于无穷大。

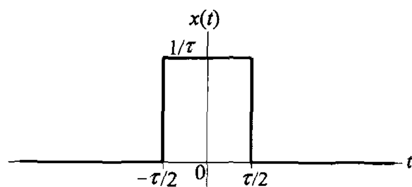


图 1-13 一个非周期信号的波形

1.5.1 傅里叶变换

在把图 1-13 中的 $x(t)$ 看成周期信号之后，就可以把它展开成式(1-36)的形式，其中的复指数分量的系数可以用式(1-41)来计算：

$$X_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m f_0 t}\mathrm{d}t \tag{1-42}$$

上式中，用 $2\pi f_0$ 代替了式(1-41)中的 ω_0。

因为 $x(t)$ 是一个像图 1-13 中那样的非周期信号，所以，式(1-42)中的积分值(不包括积分号前的 $1/T_0$)一定是有限的(即不是无穷大)。因此，当我们令 T_0 趋于无穷大的时候，X_m 一定趋于零。为了避免 X_m 等于零，可以先在式(1-42)的两边同时乘以 T_0，这也等同于除以 f_0。这样，式(1-42)变为：

$$\frac{X_m}{f_0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m f_0 t}\mathrm{d}t \tag{1-43}$$

上式左边的 X_m/f_0 的意思是，把周期信号 $x(t)$ 的每一个复指数分量的幅度(也包括相位)均匀地分摊到它所在的带宽等于 f_0 的频带内。所以，X_m/f_0 表示了 $x(t)$ 的复指数分量的幅度随频率的密度分布，因而也可以叫做 $x(t)$ 的幅度密度谱。

现在就可以令 $x(t)$ 的周期 T_0 趋于无穷大，因而，$x(t)$ 就变为图 1-13 中那样的非周期信号。由于 T_0 趋于无穷大，式(1-43)中的 f_0 就趋于零。这就是说，原先傅里叶级数展开式中各个复指数分量之间的频率间隔现在已经趋于零，使原来的线谱变成了一个连续谱。相应地，式(1-43)右边的 mf_0 就变为连续谱中的一个频率 f，而式(1-43)左边的 X_m/f_0 就变为我们想要的幅度密度谱 $X(f)$。因此，当 T_0 趋于无穷大时，由式(1-43)得到：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t \tag{1-44}$$

等式(1-44)就是非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换计算公式。为了保证式(1-44)积分的存在，要求被积函数 $x(t)$ 是绝对可积的。

作为一个例子，我们用式(1-44)来计算图 1-13 中 $x(t)$ 的傅里叶变换：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \tau^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = \frac{1}{-\mathrm{j}2\pi f\tau}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f\tau}) = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

上式最右边的那个分式是一个 sinc 函数，因而上式可以写为

$$X(f) = \mathrm{sinc}(f\tau) \tag{1-45}$$

由式(1-45)可知，$X(f)$ 的幅度谱有图 1-8 中那样的形状。当 $f = \pm 1/\tau$、$f = \pm 2/\tau$、…时，幅度谱都等于零；而 $x(t)$ 的相位谱则处处为零。具体的频谱图将在下面的 1.7 节中画出。在那里，我们还要把 sinc 函数的负号归入相位中。

1.5.2 傅里叶反变换

我们用上面相似的方法来推导傅里叶反变换公式。首先把周期信号的傅里叶展开式(1-36)改写为下面的形式：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{X_n}{f_0}e^{j2\pi nf_0t}f_0 \tag{1-46}$$

上式中的 X_n/f_0 就是式(1-43)中的 X_m/f_0，而 $f_0=\omega_0/2\pi$。

对于式(1-46)的右边，当我们令 f_0 趋于零[也就是令 $x(t)$ 的周期 T_0 趋于无穷大]的时候，nf_0 变为连续谱中的一个频率 f，f_0 变为一个无限窄的频带 df，X_n/f_0 变为式(1-44)中的 $X(f)$，而式(1-46)中的连加运算变成了一个积分运算。这样，式(1-46)就可以写为：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df \tag{1-47}$$

上式就是我们想要的傅里叶反变换计算公式。

下面解释式(1-47)傅里叶反变换的含义。为了便于解释，我们使用一个具体的信号，这就是图1-13中的波形 $x(t)$，并且让其中的 $\tau=1$，因此，计算 $x(t)$ 傅里叶变换的式(1-45)现在变为：

$$X(f)=\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \tag{1-48}$$

把上式中从－1.0到1.0频率范围内的 $X(f)$ 画在图1-14中；这是非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(f)$ 的主要部分，而且在这一范围内的相位处处为零。我们的解释就是用这个频率范围内的 $X(f)$ 通过傅里叶反变换近似地还原出 $x(t)$，因而可以比较具体地知道 $X(f)$ 的含义。

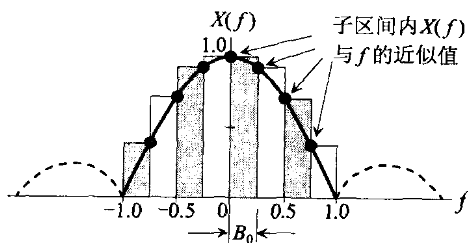


图1-14　非周期信号 $x(t)$ 幅度谱的主要部分被划分成了8个等宽的子区间

我们首先把图1-14中的这个频率范围划分为8个等宽度的子区间，因而每个子区间的带宽 $B_0=0.25$；每个子区间内的 $X(f)$ 近似地用子区间内离纵坐标最近的那个 $X(f)$ 值来表示，相应地，每个子区间的频率也用离纵坐标最近的那个频率 f 来表示。这样就构成了图1-14中的8个矩形。

现在，傅里叶反变换式(1-47)的积分可以近似地通过图1-14中的8个矩形以累加的方式来计算：

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^{3}\left[X(kB_0)e^{j2\pi kB_0t}B_0+X(-kB_0)e^{-j2\pi kB_0t}B_0\right] \tag{1-49}$$

由于 $X(f)$ 是偶对称的，所以上式可以简化为：

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^{3}X(kB_0)(e^{j2\pi kB_0t}+e^{-j2\pi kB_0t})B_0 \tag{1-50}$$

利用欧拉恒等式，上式又可以变为：

$$x(t) \approx 2B_0 \sum_{k=0}^{3} X(kB_0)\cos(2\pi kB_0 t) \tag{1-51}$$

由表 1-1 可以查得每个子区间的 $X(f)$ 近似值分别等于{1.00,0.90,0.64,0.30};此外,$B_0=0.25$。将它们代入式(1-51)之后,式(1-51)变为:

$$x(t) \approx 0.50+0.45\cos(2\pi\times 0.25t)+0.32\cos(2\pi\times 0.5t)+0.15\cos(2\pi\times 0.75t) \tag{1-52}$$

利用式(1-52)可以画出 $x(t)$ 的近似波形,如图 1-15 所示。图中上面的 $x_0(t)$ 到 $x_3(t)$ 的 4 个波形分别对应于式(1-52)右边的第一项到第四项。可以预计,随着式(1-49)中使用的频率范围向正负两侧的不断扩展以及子区间的不断变窄,我们最终将得到 $x(t)$ 的确切波形(图 1-15 中的虚线方波),这时的等式(1-49)就变为式(1-47)的傅里叶反变换。

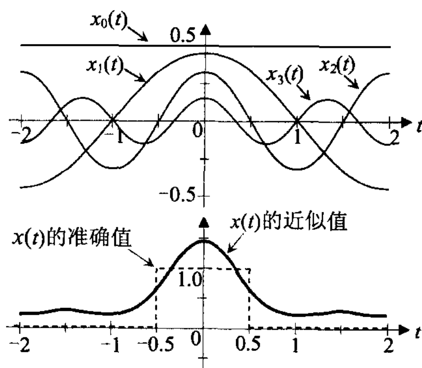


图 1-15 根据傅里叶反变换公式得出的 $x(t)$ 的近似值波形

从上面的分析可以清楚地看出,$X(f)$ 是一个幅度密度谱;在任何一个频率点上,它只是一个幅度为无穷小的复指数,而在某一个窄带内的总和才是一个有限幅度的复指数。

1.6 能量信号与功率信号

根据信号包含的功率和能量的多少,可以把信号分为能量信号和功率信号。我们先来看一个很熟悉的例子:一个电压的功率和能量。

在电子线路中,一个电压的功率规定为把这个电压加到 1Ω 电阻上所产生的功率。比如,有一个电压 $v(t)$,它的功率可以表示为:

$$p(t)=\frac{v^2(t)}{R}=v^2(t) \tag{1-53}$$

我们一般希望知道一个电压的平均功率。因此,需要把全部时间范围内的功率加起来,再除以时间的总长度,而时间范围一般是$(-\infty,\infty)$。所以,一个电压的平均功率可以表示为:

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}p(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}v^2(t)\,dt \tag{1-54}$$

由上式可以得到这个电压在全部时间范围内总能量的计算公式:

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}p(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}v^2(t)\,dt \tag{1-55}$$

现在从电压 $v(t)$ 回到信号 $x(t)$(电压当然也是信号)。信号 $x(t)$ 的总能量可以表示为:

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}x^2(t)\,dt \tag{1-56}$$

而信号 $x(t)$ 的平均功率可以表示为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-57}$$

有了式(1-56)和式(1-57)，就可以把信号区分为能量信号与功率信号：如果一个信号的总能量小于无穷大(它的平均功率一定为零)，那么，这样的信号就叫做能量信号。比如，一般的非周期信号。如果一个信号的平均功率大于零且小于无穷大(它的总能量就一定是无穷大)，那么，这样的信号就叫做功率信号。比如，一般的周期信号。此外还有第三类信号，即，既非能量信号又非功率信号的信号，比如一个发散的指数信号，它的功率趋于无穷大，但这类信号在实际应用中是极为少见的。

1.7　线谱与连续谱

在1.2节中的复指数信号讨论中，我们见到了图1-5、图1-6和图1-7中的线谱。而且，线谱是与复指数信号关联的。在1.5节的傅里叶变换中，我们把一个非周期信号表示成一个连续谱。显然，线谱与连续谱有不同的含义。我们将分别讨论线谱和连续谱，然后对两者进行比较。

1.7.1　线谱

在1.4.3节中，我们把傅里叶级数表示为复指数的形式，这就是等式(1-36)。式(1-36)中的每一项都是一个复指数信号，并且由两个因子组成：一个因子是频率等于 $n\omega_0$ 的单位复指数；另一个因子是 X_n，用来表示这个复指数的幅度和相位。所以，式(1-36)中的每一个复指数信号都有自己的频率、幅度和相位。如果我们以频率为自变量，那么幅度和相位就可以看成频率的函数。这样就建立起了描述每个复指数信号的幅频特性和相频特性，这就是复指数信号的幅度谱与相位谱。因为这些幅度谱与相位谱都是由一些孤立的直线组成的，所以这些幅度谱与相位谱被叫做线谱。

我们再用一个余弦信号来说明线谱的含义。假定这个余弦信号的振幅为1.8，频率为500 Hz，初始相位为0.7π，因而，这个余弦信号可以写为：

$$x(t)=1.8\cos(2\pi 500t+0.7\pi) \tag{1-58}$$

把上式改写为复指数的形式

$$\begin{aligned}x(t)&=1.8\times\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi 500t+0.7\pi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi 500t+0.7\pi)}}{2}\right]\\&=0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.7\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi 500t}+0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.7\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi 500t}\end{aligned} \tag{1-59}$$

这样，一个余弦信号被分解成了两个复指数信号，它们有相等的幅度、相反的频率和相反的相位。我们把式(1-59)中的两个复指数信号用频谱图画出，如图1-16所示。而且，频谱图中的每一条谱线都表示了一个实际存在的复指数信号。

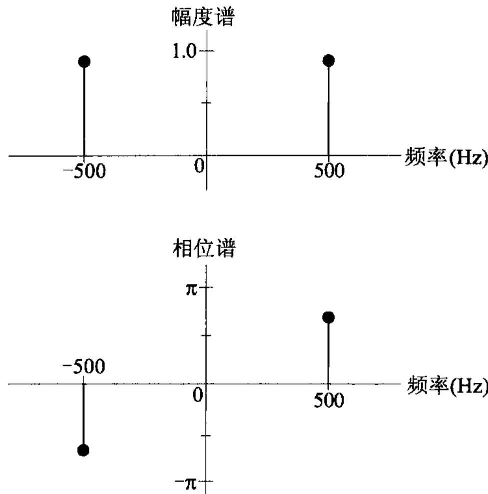


图 1-16 一个余弦信号的幅度谱和相位谱,这两个谱图都是线谱

此外,图 1-16 中的相位谱不同于图 1-5 中的相位谱。其原因是,式(1-58)中包含了一个 0.7π 的初相;而图 1-5(包括图 1-6)中的复指数信号都是初相为零的情况。

1.7.2 连续谱

连续谱是由非周期信号通过傅里叶变换得出的。而且,非周期信号的连续谱应该被看成信号的复指数分量的密度谱,表示每单位频带内的复指数分量的幅度与相位。在前面的式(1-45)中,我们已经计算出了图 1-13 中 $x(t)$的频谱 $X(f)$,它是一个 sinc 函数。我们按照式(1-45)画出了 $X(f)$的幅度谱,如图 1-17 的上图所示,其中,$f_0=1/\tau$。

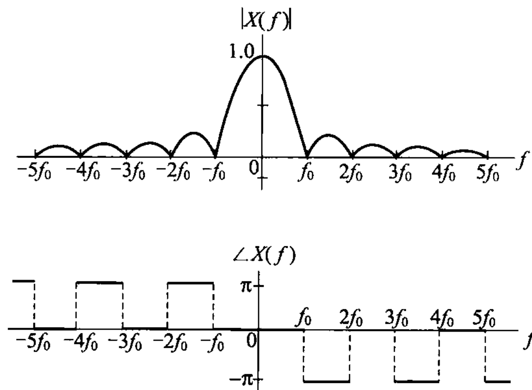


图1-17 一个非周期信号的谱图。它的幅度谱是连续谱,相位谱等于零或±π

根据式(1-45)的计算，图1-13中$x(t)$的相位谱恒等于零，这是因为$x(t)$的对称中心位于$t=0$的纵坐标。但是，因为sinc函数的值是正负交替的(见图1-8)，所以，在把$X(f)$分解成幅度谱和相位谱的时候，sinc函数值中的那个负号就应该归入相位谱中，这就使图1-17下面的相位谱中出现了$\pm\pi$的相位。实际上，图中$\pm\pi$的选择不是唯一的，因为对于正余弦函数而言，$\pm\pi$是完全一样的。图中的选择仅仅是为了表示相位谱的奇对称性。

1.7.3　线谱与连续谱的关系

线谱与连续谱之间的关系就好比连续时域中的$\delta(t)$与$x(t)$之间的关系[$\delta(t)$将在3.2.1节中说明]。$x(t)$在时间上是连续的，它的能量分散到了所有时间点上，因此在任意一个时间点上的能量都是无穷小。但$\delta(t)$的能量完全集中在某个时间点上。对此，我们还可以有下面的力学比喻。

在图1-18的两个分图中，横梁受到相等的1N力的作用，但作用方式不同。图1-18a中把1kg重的沙子堆放在横梁上。因此，沿着横梁长度方向上处处承受到了压强，但在每一点上的压力都等于零。连续谱就好比这个情况。它在每一个频率点上的能量是无穷小。把所有频率范围内的能量加起来就得到信号的总能量。

在图1-18b中，1N的力只作用在横梁的一个点(即P点)上。在沿着横梁长度方向上的其他地方，受力都等于零。但在P点上，横梁受到的压强是无穷大。线谱就好比是这个单点力的情况，它在某个频率点有一定的功率，因而有无穷大的能量，但在其他频率点上的能量都等于零。

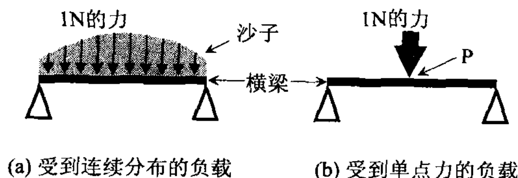


图1-18　横梁的受力情况

小结

- 在信号处理中，复数的直角坐标与极坐标之间的转换是经常用到的。复函数的周期性、多值性和等比级数求和也是在信号处理中经常用到的。
- 复指数信号是最小的信号单位，它与负频率是密切相关的。正弦或余弦信号可以表示为一对正负频率复指数之和或之差；而单独的一个复指数信号可以用一对正交的余弦和正弦分量组成，复指数信号具有单一频率的特点。
- sinc函数是信号处理中最常见的函数之一，它的形状是一个沿水平轴向正负两

侧延伸并趋于零的减幅振荡。

- □ 傅里叶级数展开法可以把周期信号分解为许多谐波分量之和。分解时利用了三角函数的正交性原理。傅里叶级数还可以表示为复指数的形式。
- □ 傅里叶变换适用于非周期信号的谱分析，它可以看作傅里叶级数展开式中的信号周期趋于无穷大时的情况。傅里叶变换产生的是连续谱，表示信号的幅度（能量）随频率的密度分布。
- □ 我们见到的大多数信号都可归入能量信号或功率信号：非周期信号属于能量信号，周期信号属于功率信号。
- □ 线谱表示了复指数信号的频率、幅度和相位，所以，线谱也就表示了周期信号的频率、幅度和相位。
- □ 连续谱所表示的是非周期信号的幅度（能量）和相位随频率的分布，表示了每单位频带内的复指数分量的幅度和相位。

习题

1.1 画出下面 3 个余弦函数之和的波形。

$$x(t)=\cos(\omega_0 t)-1.2\cos(2\omega_0 t)-0.5\cos(3\omega_0 t)$$

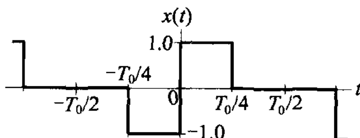
说明 $x(t)$ 是奇对称还是偶对称。

1.2 证明：

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T_0/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

其中，$\omega_0=2\pi/T_0$。

1.3 将下面的 $x(t)$ 波形展开为傅里叶级数：



1.4 确定下列信号的周期，画出它们的波形，并计算它们的平均功率。

(1) $3\cos(314t)$

(2) $5\cos(100\pi t+\pi/3)+2\sin(100\pi t)$

(3) $\sin(150\pi t)$

1.5 画出下列信号的波形，并计算它们的能量，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数。

(1) $e^{-5t}u(t)$

(2) $u(t)-u(t-15)$

(3) $\cos(10\pi t)u(t)u(2-t)$

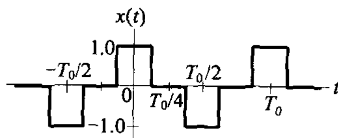
1.6 试确定下列信号中，哪些是功率信号，哪些是能量信号。对于功率信号，计算它们的平均功率；对于能量信号，计算它们的能量。

（1）$\cos(3\pi t)+\sin(2\pi t)$

（2）$e^{-7t}u(t)$

（3）$e^{3t}u(t)$

1.7　一个周期信号有下面的波形：



试确定：

（1）傅里叶展开式中直流分量 a_0 的值，说明理由。

（2）傅里叶展开式中正弦分量 b_m 的值，说明理由。

（3）如果把傅里叶展开式表示为复指数形式，那么它的系数是实数、虚数还是复数？说明理由。

1.8　如果 $x(t)$ 是实数和偶对称的，试证明它的傅里叶变换可以简化为：

$$X(f)=2\int_0^{\infty}x(t)\cos(2\pi ft)\,dt$$

并说明 $X(f)$ 也是实数和偶对称的。

1.9　如果 $x(t)$ 是实数和奇对称的，试证明它的傅里叶变换可以简化为：

$$X(f)=-2j\int_0^{\infty}x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

并说明 $X(f)$ 是虚数和奇对称的。

1.10　一个实数信号 $x(t)$ 的傅里叶变换可以表示为下面的幅度和相位两部分：

$$X(f)=|X(f)|\exp[j\theta(f)]$$

证明它的幅度是偶函数，相位是奇函数，即，$|X(f)|=|X(-f)|$，$\theta(f)=-\theta(-f)$。

第 2 章
数字信号处理概述

2.1 数字信号处理系统

数字信号处理(Digital Signal Processing,DSP)是一种对客观世界中的物理现象进行数字分析和处理的技术。完成这种分析和处理的系统叫做数字信号处理系统(DSP系统)。由于周围的大多数信号都是模拟量,所以,在进行数字信号处理之前,必须把这些模拟量转化为数字量。这个转换要使用模数转换器(ADC)。此外,在数字信号处理系统把处理完成的数字信号输出之后,还必须用数模转换器(DAC)把数字信号还原成模拟信号,信号才可以被使用。所以,一个完整的数字信号处理系统应该包括 3 部分:模数转换器、数字信号处理系统和数模转换器,如图 2-1 所示。

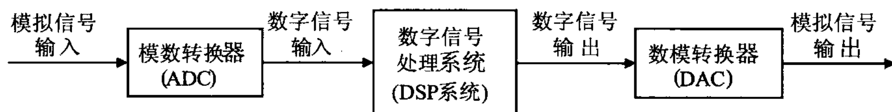


图 2-1　一个完整的数字信号处理系统

我们用一个简单的例子来说明 DSP 处理是如何进行的。这个简单的处理任务是计算出最近的 4 个输入样点的平均值,将其作为 DSP 系统的输出。这实际上是完成一项低通滤波的任务。比如,当数字信号中夹杂高频噪声时,就可以使用这种方法。

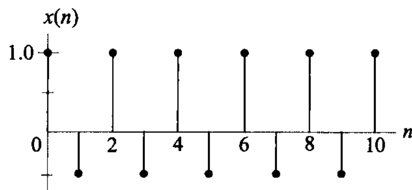


图 2-2　DSP 系统的输入信号

我们假设输入的数字样点 $x(n)$ 为交替的 1.0 和 -0.5,如图 2-2 所示,其中的 n 是从零开始递增的整数。按照处理任务的要求,可以设计出一个数字信号处理系统,而描述这个数字信号处理系统的是下面的差分方程:

$$y(n)=0.25\times[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)]$$

处理系统的计算框图可以根据这个差分方程画成图 2-3 的样子。图中的 z^{-1} 方框表示延迟一个采样周期,这就是,把每个 z^{-1} 方框输入端上的样点值记忆下来,在下一

个采样周期时送到它的输出端。图 2-3 中下面的 3 个加法器完成对 $x(n)$到 $x(n-3)$这 4 个最近输入样点的求和。这样求得的输出信号 $y(n)$示于图 2-4 中。

对照图 2-2 和图 2-4 可知，这个 DSP 系统确实完成了低通滤波的任务，它消除了图 2-2中的高频振荡，因而还原出了埋在高频振荡中的幅度等于 0.25 的直流信号。

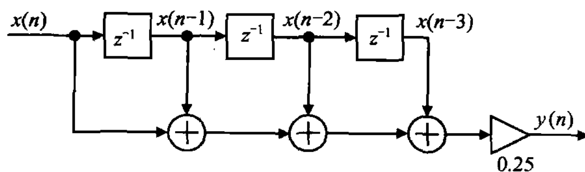


图 2-3　DSP 系统的计算框图

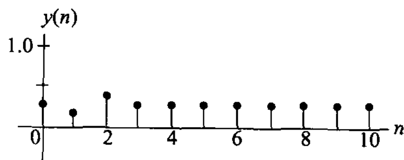


图 2-4　DSP 系统的输出信号

2.2　原理与实现

数字信号处理技术可以分为原理和实现两大方面。原理是讲数字信号处理的基本理论和算法，比如，滤波器是如何设计的，离散傅里叶变换是如何计算的，等等。数字信号处理的原理并不涉及具体的实现方法。

数字信号处理的实现是指把一个用高级语言写成的 DSP 算法转变成信号处理器中的一道程序或一个专用芯片。因此，数字信号处理的原理与实现是相互没有太大联系的两件事。本书是讲数字信号处理原理的，所以不会涉及信号处理器的内容。

2.3　硬件与软件

数字信号处理的实现有硬件和软件两种方法。硬件方法是指使用专用电路来完成，比如采用 ASIC、ASSP 或 FPGA 等。这种实现方法不是依靠执行指令或程序完成的，而是在时钟的同步控制下，使数字信号流过专用电路内的一连串逻辑部件，并最后出现在输出端上。这些专用电路包括卷积器、相关器、FFT 芯片等。在许多年以前，由于数字信号处理器的速度达不到许多 DSP 任务的速度要求，所以在数字信号处理系统的关键部位必须使用 DSP 专用电路。但随着处理器速度的提高，大多数 DSP 专用电路已经逐渐被通用的 DSP 芯片和其他通用处理器所代替。

所以，现在的数字信号处理几乎都是用软件完成的，软件方法又可分为 DSP 处理器的方法和通用处理器的方法。DSP 处理器的方法一般是依靠汇编语言程序完成的，即一套用汇编语言写成的、在某个特定 DSP 处理器上执行的程序。通用处理器的方法是指使用个人电脑或其他通用计算机系统来完成 DSP 处理任务，其中的程序一般是用高级语言写成的，比如用 C/C++语言写成。我们把 DSP 的这些不同实现方法归纳在图 2-5 中。

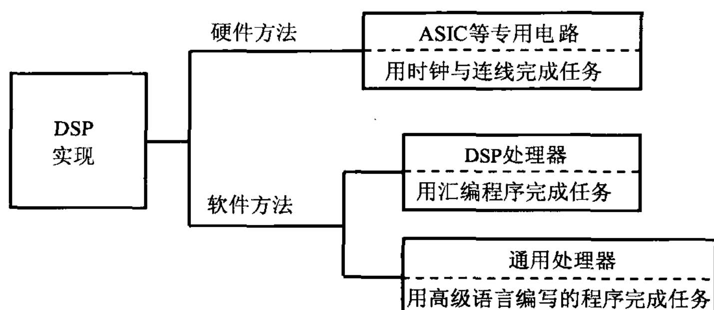


图 2-5 完成 DSP 任务可以用硬件和软件的方法

2.4 数字滤波与频谱分析

DSP 处理包括数字滤波和频谱分析两大功能。数字滤波的功能是用数字滤波器完成的，它用一连串的输入数据(信号)计算出一连串的输出数据(信号)。虽然数字滤波是在时域中进行的，但它所完成的是对信号频域特性的修改。

频谱分析是通过离散傅里叶变换(DFT)和快速傅里叶变换(FFT)实现的。DFT 和 FFT 把输入的时域信号分解成许多不同频率的分量，这就变换成了频域信号，也叫频谱。这样之后，我们就可以清楚地看到信号的频率组成。频谱分析的目的是显示信号的频率组成。

2.5 开发周期

每个 DSP 算法都有一个开发周期。它从最上层的需求表达式逐渐细化到最下层的硬件结构。开发周期可以分为 4 个步骤，如图 2-6 所示。下面分别说明这 4 个步骤的工作内容。

2.5.1 把需求表达式变为高级语言算法

作为开发周期的第一步，我们将运用 DSP 原理，把一个(组)需求表达式尽量精确地转变成一个高级语言算法。

比如，我们想开发一个判别语音信号清音或浊音的算法。下面是这样的一组需求表达式：

(1) 语音信号的过零点次数在每 20 ms 50 次以上时，就认为是清音；

(2) 语音信号的最大自相关系数小于 0.5 时，就认为是清音；

(3) 语音信号中的高频成分超过低频成分的 2 倍时，就认为是清音；

(4) 如果(1)～(3)都不成立，那么就认为语音信号是浊音。

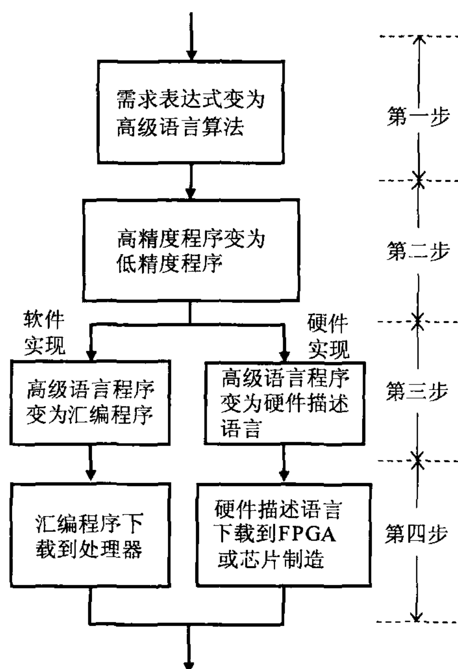


图 2-6　DSP处理算法的开发周期

在按照这组需求表达式写出了高级语言程序之后，必须对程序进行充分的测试和修改，以使写成的高级语言程序准确实现需求表达式的要求。这一阶段一般是比较费时的。但有利的一面是，由于并不涉及具体的硬件实现，所以数据都被表示为高精度的浮点数，不存在精度和误差的问题。

2.5.2　把高精度程序变为低精度程序

这一步的目的是，把高级语言中精度极高的浮点数格式转换成目标硬件环境下的定点数或浮点数格式。如果最终的硬件是一个DSP处理器，情况就比较简单，只要选用这个DSP处理器所规定的定点数或浮点数格式。如果最终的硬件实现是一个专用电路，那么，为了尽量减少硬件量和功耗，算法中的每个变量都应该根据自身的动态范围而选用恰当的精度格式。这里的难点是如何准确地确定一个变量的动态范围。

在这一步的测试过程中，需要不断调节每个变量的精度格式(对于DSP处理器也同样有高低精度的选择问题)，以找出每个变量被表达的最佳动态范围。与此同时，还必须保证从高精度浮点格式变到低精度定点或浮点格式之后，对算法引起的误差控制在允许的范围内。这一步通常需要非常严格的测试，需要一定的技巧。

2.5.3　把高级语言程序变为低级语言程序

在第三步中，我们将离开高级语言而进入比较低级的语言环境。这一步的工作内

容取决于 DSP 算法的最终实现。如果我们是用软件来实现 DSP 任务，那么，这一步的工作就是简单地把第二步中得到的高级语言程序转换成汇编程序。如果是用硬件来实现，那么这一步的任务是把第二步中得到的高级语言程序转换成 VHDL 或 Verilog-HDL 等硬件描述语言代码。至于每个变量被表示的动态范围，已经在第二步中做了恰当的选择。所以，这一步的工作内容一般是比较容易的。

2.5.4 把低级语言程序变为硬件描述代码

在第四步中，如果采用软件的实现方法，就要把汇编语言代码变为机器语言并下载到处理器中。如果是用硬件的实现方法，那就需要对硬件描述语言代码进行恰当的转换，再装入 FPGA，或送芯片生产线，以制造出专用电路。

一般来说，开发过程不会像图 2-6 中那样顺利，而是需要反复地迭代和修改。此外，成本、功耗和速度等的限制，也会增加这种迭代的可能性。

2.6 优点与缺点

DSP 之所以得到如此广泛的应用是有原因的。这些原因就是 DSP 相对于模拟信号处理的优点。其中的主要优点如下。

- □ 处理精度高。因为数字处理的精度正比于数字量的位数，而数字量位数的增加是很方便的，也是几乎不受限制的。所以，在数字系统中有一个所谓的“6 dB 规则”，即字长每增加 1 位，动态范围就增加 6 dB。但模拟信号的处理精度受到许多因素的制约，这包括模拟器件与部件自身的非线性和噪声、时钟与其他数字信号的耦合干扰（通过电源线、地线、并行引线）等。这些噪声的总和叫做系统的*噪声底线*（niose floor），而模拟系统的动态范围就被定义为不产生失真下的最大幅度与模拟系统的噪声底线之比。
- □ 长期运行的稳定性。数字电路的操作不随时间而变化，数字电路的计算结果是永远正确的。但模拟器件的参数与性能会随时间与温度而漂移，影响长期工作的稳定性。
- □ 极大的灵活性。现在的 DSP 算法都是依靠软件完成的，所以，许多不同的 DSP 算法可以容纳在同一 DSP 系统中。如果要修改某个 DSP 算法，就只需修改相应的程序或数据，而不必改动硬件。但模拟电路的修改是非常困难的，并且费时费钱。
- □ 低成本、小体积、低功耗。数字信号处理是用数字电路实现的，而数字电路的制造总是使用最先进的制造技术，以达到最高的性能、最高的集成度、最低的功耗和最低的成本。模拟电路由于制造困难（要用到电阻和电容，甚至电感，并要求元件之间的精确匹配），所以成本比较高，体积也比较大。而且，由于是线性电路，一定的偏置条件是免不了的，因此功耗也比较大。

要说DSP的缺点，也许是在某些要求处理速度极快的应用中赶不上模拟电路。但总的趋势是，DSP将不断地进入模拟电路的应用领域，迫使模拟电路向频率更高、速度更快的领域发展。应该说，模拟电路（包括混合信号电路）是与数字电路同等重要的，我们期待模拟与混合信号电路将同样会有很大的发展。

第3章
采样

现实世界中的信号几乎都是连续的模拟量，比如声音、温度等。这个“连续”有两方面的意思：一方面是在时间上的连续，另一方面是在幅度上的连续。只有在这两方面都完成了离散化之后，模拟信号才变成数字信号。

信号在时间上的离散化叫做“采样”，是本章讨论的内容。连续时域信号被采样之后的信号叫做“离散时域信号”或“采样数据信号”。数字信号处理的处理对象就是这些离散时域信号。幅度上的离散化叫做“量化”，它把信号的幅度限制在指定的有限个数值上。由于“量化”不是数字信号处理的必需内容，所以不在本书中讨论。

3.1 用ADC完成采样

在实际工作中，我们都是使用ADC(模数转换器)对模拟信号进行采样的。所以，我们先简要地讨论ADC的工作原理，然后再讨论“理想采样”。

一个ADC可以分为采样器、保持器和量化器3个模块。相应地，ADC的操作也分为采样、保持和量化3个步骤，如图3-1所示。在信号处理中，采样是以等时间间隔进行的。图3-1下面的T就是这样的一个时间间隔，叫做“采样周期”，以s为单位。采样周期的倒数叫做“采样率”或“采样频率”，它表示1 s内完成采样的次数，单位是Hz。

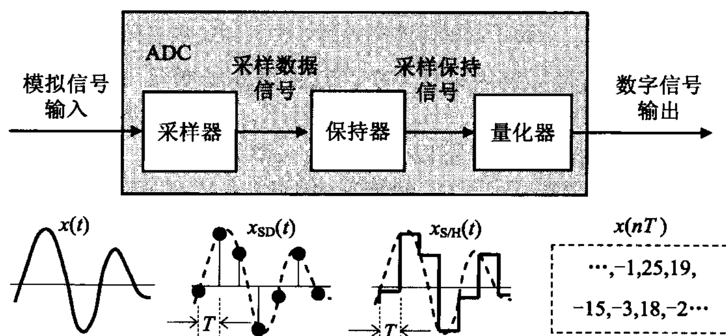


图3-1　ADC的操作分为采样、保持与量化3个步骤

在图 3-1 中，当模拟信号 $x(t)$ 加到 ADC 输入端之后，采样器就输出一连串的样点值 $x_{SD}(t)$，这就是离散时域信号（或称为采样数据信号）。后面的保持器把每个样点值保持一个 T 时间，形成了阶梯形的采样保持信号 $x_{S/H}(t)$。这些采样保持信号经过量化器之后，就变成一连串的数字量，即数字信号，这就是图中右边的 $x(nT)$。ADC 有两个主要技术指标：转换速率和转换精度（或者分辨率[①]）。

ADC 有许多不同的结构，包括并行、流水线、逐次逼近、折叠、积分、$\Delta\Sigma$ 调制等。积分为低速高精度的转换技术；逐次逼近为中速高分辨率的转换技术；并行和流水线为高速中高分辨率的转换技术；而 $\Delta\Sigma$ 调制由于巧妙地利用了 DSP 噪声整形技术而达到了最高的 24 位分辨率。

但是，ADC 的工作原理并没有告诉我们数字信号与原先模拟信号之间在频率特性上的差异。为此，我们要使用“理想采样”的分析方法。

3.2　理想采样

我们先来观察图 3-2 中的情况，以便从具体例子中了解采样率的最低限度。图中画出了 3 种不同采样率的情况。T_0 为用虚线表示的原先连续时域正弦信号的周期，所以它的频率 $f_0 = 1/T_0$。T_1、T_2、T_3 为 3 个不同的采样周期。

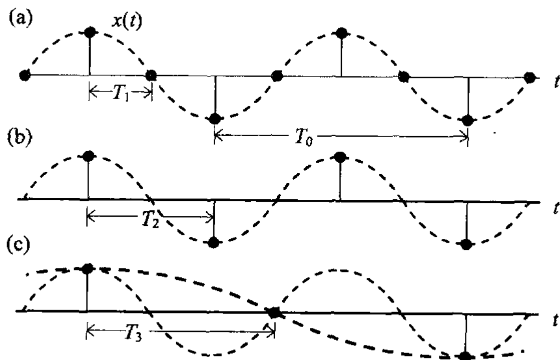


图 3-2　3 种不同的采样率得到 3 种不同的数字样点

在图 3-2a 中，每个信号周期内采样 4 次，所以，采样周期 T_1 是信号周期 T_0 的 1/4，也就是说，图 3-2a 中的采样率为 $4 \times f_0$。从采得的样点看，原先模拟信号的形状保留得很好。如果使用恰当的模拟滤波，是可以恢复出原来信号的。

图 3-2b 是每个信号周期采样 2 次的情况，因此，采样率下降到了 $2 \times f_0$，只有图 3-2a 中的一半。从图 3-2b 中采得的样点来看，我们可以勉强恢复出原来信号的样子。

图 3-2c 中的采样率下降到了 $1.33 \times f_0$。这时所采得的样点与前面图 3-2a 和 3-2b 中的情况完全不同。如果用图 3-2c 中的这些样点来恢复模拟信号（图 3-2c 中较粗的虚线），就可以看出信号的频率都错了。因此，用图 3-2c 中的样点来恢复原来的信号已经

① 分辨率与转换精度是两个概念。

是不可能了。如果再降低采样率，情况会更坏。

通过上面 3 种不同采样率的比较可以看出，如果要保留原来信号的全部特征，$2\times f_0$ 的采样率应该是采样操作的最低限度。这就是图 3-2b 中的情况。下面将通过理想采样来证明这个采样率下限，但首先要使用 δ 函数。

3.2.1 δ 函数的筛选特性

δ 函数也叫单位脉冲函数或单位冲击函数，可以写为 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-\tau)$。我们先讨论 $\delta(t)$，然后再讨论 $\delta(t-\tau)$。

$\delta(t)$ 的波形可以用图 3-3 来表示。从图中可知，$\delta(t)$ 是一个连续时域信号；只在 $t=0$ 的邻域才有一个很窄的矩形波。在矩形波之外的其他时间上，处处为零。而且，这个矩形的底边在不断变窄并趋于零，高度在不断增加并趋于无穷大，但矩形的面积恒为 1。所以，δ 函数是一个极限过程，图 3-3 中的箭头表示了这个趋于极限的过程。此外，δ 函数还可以取其他的形状，比如梯形、余弦形等。

$\delta(t)$ 的特点是它的筛选特性，也就是采样特性。这个意思是，如果用 $\delta(t)$ 去乘模拟信号 $x(t)$，就可以把 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的值筛选出来，如图 3-4 所示。图 3-3 中表示 $\delta(t)$ 的那些矩形现在变成了图 3-4a 中的一个箭头。在图 3-4 中，用 $\delta(t)$ 去乘 $x(t)$，就得到图 3-4c 中的乘积函数 $x_{S0}(t)$；其中，$x_{S0}(t)$ 下标中的 S 表示采样，0 表示对 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的值进行采样。图 3-4a 中的标尺 1.0 仅表示 δ 函数的面积。

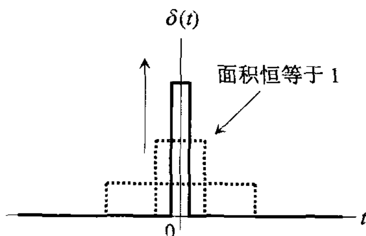


图 3-3 $\delta(t)$ 是一个极限过程

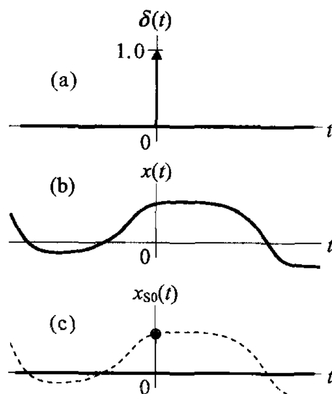


图 3-4 $\delta(t)$ 对信号的筛选过程

我们可以把图 3-4 中的乘积函数 $x_{S0}(t)$ 表达为：

$$x_{S0}(t)=x(t)\delta(t) \tag{3-1}$$

我们来解释 $\delta(t)$ 的筛选特性。首先用一个矩形波来表示 $\delta(t)$，如图 3-5 所示。矩形的中心位于 $t=0$，底边宽度为 2Δ，高度为 $1/(2\Delta)$，因而它的面积等于 1。这实际上把 $\delta(t)$ 的非零值的范围限制在了区间 $[-\Delta,\Delta]$ 之内。

现在令 Δ 趋于零，因此，乘积函数 $x_{S0}(t)$ 在 $t=0$ 处的值为：

$$x_{S0}(t)\big|_{t=0}=\lim_{\Delta\to0}\int_{0-\Delta}^{0+\Delta}x_{S0}(t)\mathrm{d}t=\lim_{\Delta\to0}\int_{0-\Delta}^{0+\Delta}x(t)\delta(t)\mathrm{d}t \tag{3-2}$$

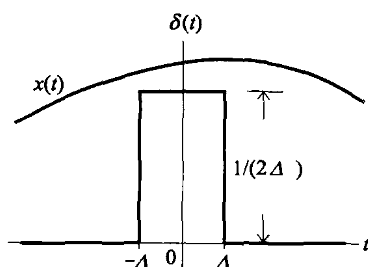


图 3-5 用 $\delta(t)$ 筛选出 $x(t)$ 在 $t=0$ 时的值

在上式右边的积分中，由于 Δ 为无穷小，所以，$x(t)$ 在$[-\Delta,\Delta]$ 范围内可以认为都等于 $x(0)$，因而可以提到积分号和极限号之前。这样，式(3-2) 变为：

$$x_{S0}(t)\mid_{t=0}=x(0)\lim_{\Delta\to 0}\int_{0-\Delta}^{0+\Delta}\delta(t)\mathrm{d}t \tag{3-3}$$

显然，式(3-3) 中的积分所计算的是 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 邻域内的面积，这个面积等于 1。所以，式(3-3) 可以计算为：

$$x_{S0}(t)\mid_{t=0}=x(0)\times 1=x(0) \tag{3-4}$$

在上面的计算过程中并没有用到 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时的值，只是用到了 $\delta(t)$ 的极限：它的等于 1 的面积全部集中于 $t=0$。

现在可以把单位脉冲函数 $\delta(t)$ 对 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的筛选操作表达为：

$$x_{S0}(t)\mid_{t=0}=[x(t)\delta(t)]\mid_{t=0}=x(0) \tag{3-5}$$

这里需要说明的是，必须把上面利用 $\delta(t)$ 完成的采样操作与实际中使用的采样操作区分开来。在实际的混合信号电路中，采样操作是用一个模拟开关、一个电容和一个采样控制脉冲实现的，如图 3-6 所示。在采样控制脉冲的某个边沿（图 3-6 中为下降边）使模拟开关断开的瞬间，就把此时的输入模拟电压保持在了采样电容上。

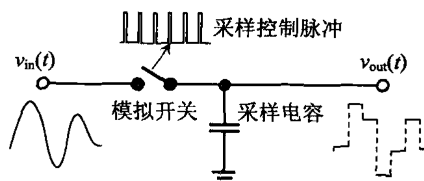


图 3-6 用模拟开关、电容和采样脉冲实现的采样操作

与之相比，利用 $\delta(t)$ 的采样操作只是理论推导的一种手段，是一个理想化的采样过程。这个理想化的采样操作表现为两个特点：(1) 采样操作是用 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 之间的乘法完成的；(2) 采样操作所得到的采样值是与 $\delta(t)$ 的面积成正比的。

我们可以把函数 $\delta(t)$ 的筛选特性从 $t=0$ 推广到任何一个时间点上。这样就可以用 δ 函数把信号 $x(t)$ 在任何时间点上的值筛选出来。比如，$x(t)$ 在 $t=\tau$ 时间点上的值可以用 $\delta(t-\tau)$ 来筛选：

$$x_{S\tau}(t)\mid_{t=\tau}=[x(t)\delta(t-\tau)]\mid_{t=\tau}=x(\tau) \tag{3-6}$$

我们先说明式(3-6)中的$\delta(t-\tau)$。因为$\delta(t)$的等于1的面积集中在$t=0$的邻域，所以，$\delta(t-\tau)$的等于1的面积集中在$t=\tau$的邻域。这就是说，把时间变量t替换成$(t-\tau)$的结果，是把$\delta(t)$向右(如果$\tau>0$)或向左(如果$\tau<0$)平移了时间τ。

图3-7表示了式(3-6)中用$\delta(t-\tau)$对$x(t)$进行筛选的过程。图3-4中的$\delta(t)$现在变成了图3-7中的$\delta(t-\tau)$。在图3-4a中出现在$t=0$的那个箭头，现在出现在$t=\tau$的时刻。由此可见，只要改变τ，就可以用δ函数筛选出$x(t)$在任何时间点上的值。

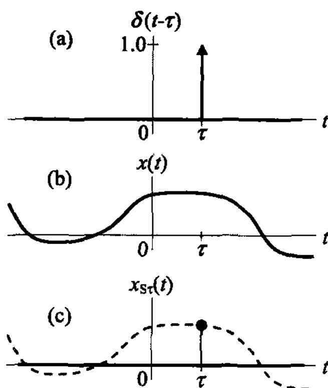


图3-7 $\delta(t-\tau)$筛选出$x(t)$在$t=\tau$时的值

3.2.2 采样脉冲函数 $p(t)$

现在需要构造一个新的函数，它叫"采样脉冲函数"，用$p(t)$表示。它由无数个δ函数组成，其中的每一个δ函数与它前后的两个δ函数都只间隔一个T的时间(T仍为采样周期)。由于$\delta(t-nT)$只在$t=nT$的时间点上才有面积等于1的矩形波，在其他时间上处处为零，所以，在把无数个δ函数叠加起来组成$p(t)$的时候，这些δ函数之间是互不影响的。

采样脉冲函数$p(t)$可以写为：

$$\begin{aligned}p(t)&=\cdots+\delta(t+2T)+\delta(t+T)+\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\cdots\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\end{aligned} \tag{3-7}$$

图3-8a就是式(3-7)所表达的采样脉冲函数$p(t)$的波形。在图3-8a中，我们随意地标出了两个δ函数：$\delta(t+T)$是把$\delta(t)$左移一个T后得到的，而$\delta(t-2T)$是把$\delta(t)$右移$2T$后得到的。图3-8a中的标尺1.0仅表示δ函数的面积。

根据上一节叙述的δ函数的筛选特性，我们只要用采样脉冲函数$p(t)$去乘连续时域信号$x(t)$，就可以完成对$x(t)$的采样。这可以写为：

$$x_S(t)=x(t)p(t) \tag{3-8}$$

其中，$x_S(t)$为$x(t)$被$p(t)$采样之后的信号，叫做"已采样信号"。

图 3-8 画出了式(3-8) 的采样过程。图中的已采样信号 $x_S(t)$ 保留了 $x(t)$ 在所有 $t=nT$ 时间点上的值，而在其他时间上的值全部为零。这就是我们所需的对信号 $x(t)$ 的“理想采样”。而且，图 3-8c 中的已采样信号 $x_S(t)$ 是与图 3-1 中的采样数据信号 $x_{SD}(t)$ 相对应的。

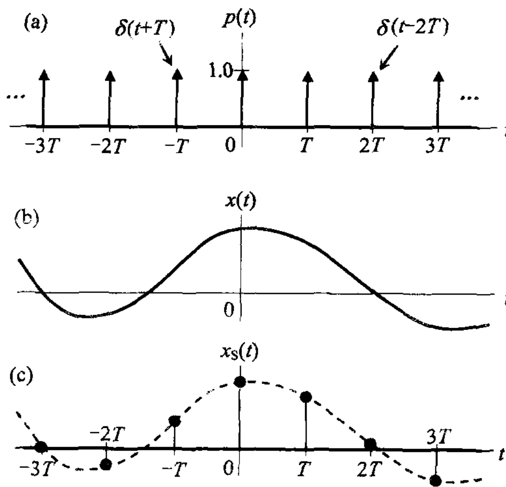


图 3-8　用采样脉冲函数 $p(t)$ 对信号 $x(t)$ 进行理想采样

为了确定采样率的下限，必须对采样前后的信号 $x(t)$ 与 $x_S(t)$ 做频域分析。为此，我们要借助傅里叶级数和傅里叶变换的分析方法。

3.2.3　理想采样的谱分析

因为 $p(t)$ 是一个周期函数(见图 3-8a)，所以，可以展开为傅里叶级数。又因为 $p(t)$ 是一个偶函数，所以，傅里叶级数中只有直流分量和余弦分量。因此，$p(t)$ 有下面的傅里叶展开式：

$$
\begin{aligned}
p(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_S t) \\
&= a_0 + a_1\cos(\omega_S t) + a_2\cos(2\omega_S t) + \cdots + a_n\cos(n\omega_S t) + \cdots
\end{aligned}
\tag{3-9}
$$

其中，$\omega_S = 2\pi/T$，是图 3-8 中 $p(t)$ 的重复频率，在展开式中叫基频，也是讨论中的理想采样的采样率。

根据1.4节讨论的三角函数正交性原理，要计算式(3-9) 右边傅里叶级数中第 m 项的系数 a_m，就只要对式(3-9) 两边同时乘以 $\cos(m\omega_S t)$，然后对等式两边在图 3-8 中的区间 $[-T/2, T/2]$ 内积分。这个积分计算就是 1.4 节中的式(1-26)，但现在变为：

$$
a_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\cos(m\omega_S t)\,\mathrm{d}t \tag{3-10}
$$

上式中，用 T 代替了式(1-26) 中的 T_0，用 $p(t)$ 代替了式(1-26) 中的 $x(t)$，用 ω_S 代替了式(1-26) 中的 ω_0。

在式(3-10)的积分区间$[-T/2, T/2]$内,$p(t)$等于$\delta(t)$。所以,被积函数只在$t=0$的很窄的邻域内才不为零。因此,在这个邻域内的余弦函数可以认为等于1。这样,式(3-10)可改写为:

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{0^-}^{0^-} \delta(t)\,\mathrm{d}t$$

显然,上式中的积分就是计算$\delta(t)$在$t=0$邻域内的面积,这个面积等于1。所以,我们得到:

$$a_m = \frac{2}{T} \tag{3-11}$$

傅里叶展开式中的a_0是采样脉冲函数$p(t)$的直流平均值,我们用式(1-27)来计算:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \tag{3-12}$$

这样,我们计算出了采样脉冲函数$p(t)$的傅里叶级数展开式中的全部系数:

$$\begin{cases} a_0 = 1/T \\ a_m = 2/T, \quad m = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3-13}$$

现在对上式做一点修改。上面a_0和a_m表达式中的T只是起到一个比例因子的作用。如果把图3-8a中$p(t)$的每个δ函数的面积乘以T,那么在式(3-13)中就不会出现T了。因此,我们可以暂时略去这个T,因而式(3-13)可以化简为:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_m = 2, \quad m = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3-14}$$

这是一个关于$p(t)$的非常简单和容易记忆的公式。

把式(3-14)中的a_0和a_m代入式(3-9)之后,得到采样脉冲函数$p(t)$的傅里叶级数展开式:

$$p(t) = 1 + 2\cos(\omega_S t) + 2\cos(2\omega_S t) + \cdots + 2\cos(m\omega_S t) + \cdots \tag{3-15}$$

再把展开式(3-15)中的余弦项用复指数信号来表示:

$$\begin{aligned} p(t) &= \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_s t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_s t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_s t} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_s t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_s t} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_s t} \end{aligned} \tag{3-16}$$

在式(3-16)中,$p(t)$被表示为无数个复指数信号的相加;它们的频率各不相同,但都是采样率ω_S的整数倍。根据1.7节中叙述的复指数信号与线谱的对应关系,采样脉冲函数$p(t)$的频谱$P(\omega)$是一个由无数条谱线组成的线谱,如图3-9所示;其中的每条谱线的幅度都等于1,相位都等于零,并且都与式(3-16)中的一个复指数分量相对应。

在把$p(t)$展开为复指数信号之后,就可以分析连续时域信号$x(t)$在采样前后的频谱变化。假设信号$x(t)$的傅里叶变换存在,并等于$X(\omega)$。我们现在对已采样信号$x_S(t)$做傅里叶变换。

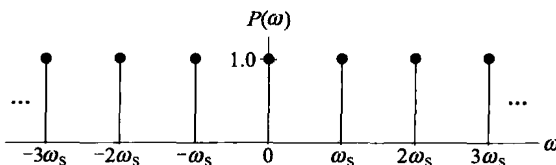


图 3-9　采样脉冲函数 $p(t)$ 的频谱是一个线谱

根据傅里叶变换的定义，已采样信号 $x_S(t)$ 的傅里叶变换可以写为：

$$X_S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_S(t)e^{-j\omega t}dt \tag{3-17}$$

将式(3-8) 和式(3-7) 先后代入式(3-17)。由于 $x(t)$ 与 n 无关，可以移到连加号之后。在把连加号与积分号交换位置之后，式(3-17) 变为：

$$X_S(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{jn\omega_S t}e^{-j\omega t}dt\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j(\omega-n\omega_S)t}dt\right) \tag{3-18}$$

上式右边括号内的积分式已经是一个傅里叶变换了。为了清晰起见，我们对上式右边使用变量代换：

$$\omega=\omega_1+n\omega_S \tag{3-19}$$

因此，式(3-18) 的右边变为：

$$\text{式(3-18) 的右边}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega_1 t}dt\right) \tag{3-20}$$

式(3-20) 圆括号内的这个积分就是 $x(t)$ 的傅里叶变换。因此，式(3-20) 变为：

$$\text{式(3-18) 的右边}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega_1) \tag{3-21}$$

现在把频率 ω_1 还原到 ω。由式(3-19) 可知：

$$\omega_1=\omega-n\omega_S \tag{3-22}$$

把上式代入式(3-21)，再用式(3-21) 代替式(3-18) 的右边之后，我们得到：

$$X_S(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_S) \tag{3-23}$$

式(3-23) 就是我们想要的公式，它描述了信号被采样后的频谱变化。它的意思是：采样后的信号 $x_S(t)$ 的频谱 $X_S(\omega)$ 是由无数个原来信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 叠加而成的，而这无数个频谱中的每一个频谱的中心依次位于 $n\omega_S$ 的频率处($n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$)，其中的频率 ω_S 是采样脉冲函数 $p(t)$ 的重复频率，也是理想采样的采样率。

式(3-23) 指明了 $X_S(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 这两个频谱之间的关联和差别。我们把式(3-23) 所描述的这种频谱关系表示在图 3-10 中。图中标出了位于中间位置的原来信号 $x(t)$ 的幅度谱 $|X(f)|$，也随意地标出了 $X_S(f)$ 的另外两个幅度谱 $|X(f-2f_S)|$ 和 $|X(f+3f_S)|$。

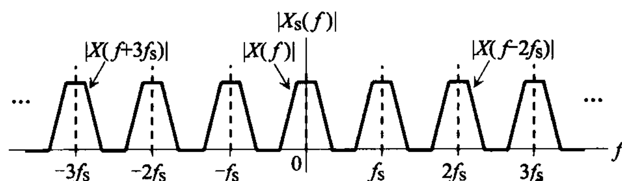


图 3-10　已采样信号 $x_S(t)$ 的幅度谱 $|X_S(f)|$，其中位于 $f=0$ 处的 $|X(f)|$ 是原来连续时域信号 $x(t)$ 的幅度谱

3.3　采样定理与混叠

由图 3-10 可知，如果连续时域信号的频谱 $X(f)$ 比较宽，那么，已采样信号的频谱 $X_S(f)$ 中的那些分离的频谱就有可能互相搭接，因而改变了原来连续时域信号的频谱。我们用图 3-11 与图 3-12 对此做进一步说明。

在图 3-11a 中，连续时域信号 $x(t)$ 的频谱为 $|X(f)|$，它的带宽 f_B 小于 $f_S/2$。根据式(3-23)，采样之后的频谱 $|X_S(f)|$ 应该是图 3-11b 那样的情况。$X_S(f)$ 中各相邻频谱 $X(f-nf_S)$ 之间保持了 (f_S-2f_B) 的间距，因此互相没有重叠，原来的谱形 $|X(f)|$ 也就没有改变。

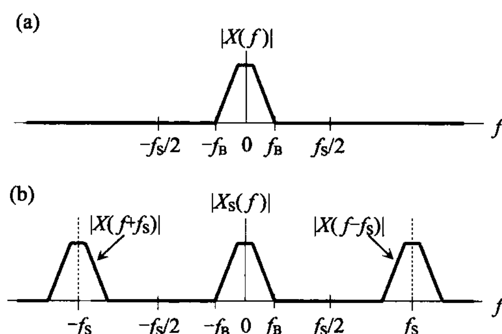


图 3-11　采样率满足采样定理

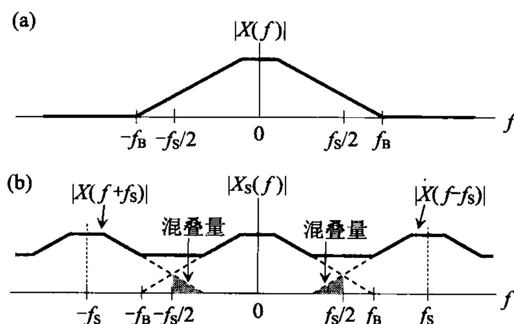


图 3-12　采样率不满足采样定理

但图 3-12 中的情况就不同。图 3-12a 中 $x(t)$ 的带宽 f_B 超过了 $f_S/2$，因此，在图 3-12b 中，$|X(f)|$ 的那些超过 $f_S/2$ 的频率分量由于采样而被折叠回到了低频区（图 3-12b 中的灰色部分），并与 $|X(f)|$ 低频区的频率分量叠加在一起，改变了 $|X(f)|$ 的谱形。这种现象叫做“混叠”。

现在，我们就可以对采样率的下限做一个规定，这就是“采样定理”。它是这样说的：在对一个连续时域信号进行采样时，如果连续时域信号的带宽为 f_B，那么，为了使采样操作能够保留下连续时域信号的全部特征，采样率必须不低于 $2\times f_B$。换句话说，用不低于 $2\times f_B$ 的采样率进行采样而得到的离散时域信号，从理论上讲，可以用来完全恢复出原来的连续时域信号。这里的 $2\times f_B$ 叫做奈奎斯特速率，而采样定理也可以叫做奈奎斯特定理。

在本章开始时，我们用图 3-2 从时域中说明了采样率的下限，而图 3-2c 中发生的就是混叠。现在从频域来说明这个混叠。假设图 3-2 中原来的模拟信号（虚线画出）的频率是 1 kHz。因此，3 个采样频率依次为 4 kHz、2 kHz、1.33 kHz，我们只解释发生了混叠的图 3-2c。

图 3-2c 中的混叠过程被表示在图 3-13 中，而且只画出正频率方向的情况。由于采样频率是 1.33 kHz，所以折叠频率是 667 Hz（折叠频率定义为采样率的一半）。原先模拟信号中的 1 kHz 的信号分量，由于大于 667 Hz 的折叠频率，而被折叠回到低频区，变为 333 Hz 的分量，这就是图 3-2c 中那条较粗虚线所表示的信号分量。当这个折叠回来的低频分量与原来信号频谱中正确的 333 Hz 分量（图中未画出）叠加的时候，就产生了频率混叠。

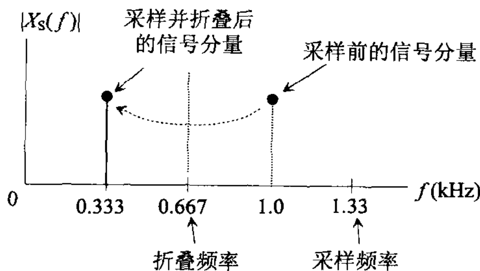


图 3-13　混叠现象的频域解释

3.4　抗混叠

混叠现象是很难避免的。首先因为一般的信号都有很宽的频率范围。其次是由于处理速度和存储量的限制，我们一般不可能把采样频率选择得充分高。比如，语音信号中的最高频率可以在 10 kHz 以上，但电话中使用的采样频率却只有 8 kHz。所以为了防止混叠，电话的音频信号被限制在 3.4 kHz 以下。随着微电子技术的发展，电话音频

信号的带宽正酝酿从 3.4 kHz 向 7 kHz 过渡。但即使带宽达到了 7 kHz，也同样存在混叠的问题。所以一般的做法是，根据具体的应用要求，把频率混叠的成分降到可以容忍的水平。

此外，一旦由于采样不当而发生频率混叠之后，这个混叠是很难消除的。所以，重要的一点是，如何在采样之前避免混叠的发生，或尽量降低混叠的程度，这就叫“抗混叠”。

抗混叠有两种方法：一种方法是在采样之前进行一次抗混叠低通滤波；另一种方法是尽量提高采样率。我们先来说明抗混叠低通滤波的方法。

抗混叠低通滤波的目的是滤除所有超过折叠频率的高频分量。我们借用图 3-12a 中的信号来说明这种抗混叠方法。采用抗混叠低通滤波之后的效果示于图 3-14 中。图 3-14a 中的虚线表示抗混叠低通滤波之前的信号频谱，f_C 为抗混叠低通滤波器的截止频率，这表示我们放弃了原来模拟信号中频率高于 f_C 的所有分量。因此，在图 3-14a 中，频谱 $|X(f)|$ 中频率大于 f_C 的成分被衰减了。图 3-14b 是模拟信号经过抗混叠低通滤波和采样后的频谱 $|X_S(f)|$。可以看出，图中的频率混叠比图 3-12b 有了显著的减小。更为重要的一点是，虽然图 3-14b 中显示了一定的混叠量，但其中被折叠到低于 f_C 的频率成分几乎等于零；而超过 f_C 的那些混叠部分是可以容易地用数字滤波器滤除的。

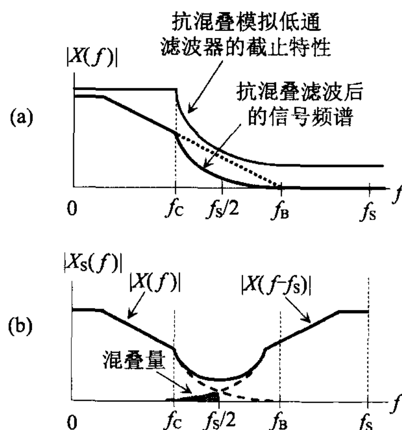


图 3-14 用模拟低通滤波器抗混叠

如果要求信号中原本会引起混叠的那些频率成分仍能正确地保留在已采样信号中，我们就只能用第二个方法：提高采样率。这等于在图 3-12b 中把频谱 $|X(f-f_S)|$ 向右平移(频谱 $|X(f+f_S)|$ 也同时向左平移)，使混叠区变窄，混叠量变小。虽然这种方法可以比较完整地保留信号的特征，但付出的代价是要求更高的处理速度和更大的存储容量，因而增加了处理成本和功耗。抗混叠是在这两种方法之间寻找一个平衡点。

小结

- □解释了单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的筛选特性，并说明了如何用它来构建采样脉冲函数 $p(t)$。
- □ $p(t)$ 是周期信号，所以就可分解为无数个复指数信号之和。
- □理想采样的操作过程是用 $p(t)$ 去乘模拟信号 $x(t)$。
- □被理想采样之后的已采样信号 $x_S(t)$ 的频谱 $X_S(f)$ 是无数个原来模拟信号频谱 $X(f)$ 的叠加。
- □最后叙述了采样定理，解释了采样定理的含义，并比较详细地叙述了频率混叠的发生和抗混叠的方法。

习题

3.1　已知下列3个连续时域信号和采样频率：

① $x(t) = 2 + 2\cos(8\pi t)$，被以16sps[①]的采样率采样；

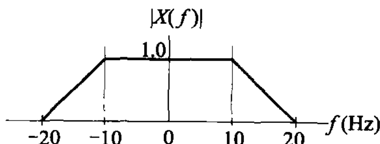
② $x(t) = \cos(20\pi t + \pi/4)$，被以12sps的采样率采样；

③ $x(t) = 5\cos(8\pi t) + 3\sin(20\pi t + \pi/8)$，被以14sps的采样率采样；

(1) 画出这3个信号的已采样信号 $x_S(t)$ 的幅度谱，要求幅度谱的最高频率画到24 Hz。

(2) 指出能否从这3个已采样信号 $x_S(t)$ 恢复出原来的连续时域信号。

3.2　已知一个连续时域信号 $x(t)$ 的幅度谱如下图所示。



(1) 画出3个采样率下的已采样信号 $x_S(t)$ 的幅度谱，这3个采样率为30 Hz、40 Hz和50 Hz。

(2) 指出其中的哪些采样率是正确的。

3.3　有一个已采样正弦信号 $\sin(n\omega_0 T)$，T 为采样周期。画出在下面各信号频率时的幅度谱，其中 ω_S 为采样频率：

(1) $\omega_0 = \omega_S/6$；

(2) $\omega_0 = \omega_S$；

(3) $\omega_0 = 0$(直流)。

3.4　我们要对一个宽带信号 $x(t)$ 进行采样。为了减少由采样引起的混叠，需要用一个前置抗混叠滤波器。我们希望采样后的信号 $x_S(t)$ 在滤波器通带内的混叠不大于 -20 dB。如果滤波器

---

① sps(samples per second，每秒钟所采集到的样点数)不是国际单位制。采样率的国际单位是Hz，但两者可以换用。

的带宽等于采样率的 1/3，试确定该抗混叠滤波器的幅频特性在过渡带内的滚降率，并说明理由。

3.5 有一个正弦或余弦信号，在被两倍于其频率 ω_0 的采样率进行采样之后的已采样信号如下：

(1) $x_S(t) = \sin(n\omega_0 T)$

(2) $x_S(t) = \cos(n\omega_0 T)$

(3) $x_S(t) = \cos(n\omega_0 T + \pi/2)$

试画出已采样信号的样点序列和幅度谱，并说明原因。

3.6 一个自动语音广播系统，从扬声器发出的声音噪声很大，试分析其可能的原因。现在希望重新设计一个这样的自动语音广播系统，包括事先的语音采录过程，并要求中等音质（可理解为保留 7 kHz 以下的音频分量）。试画出你设计的语音系统的录放音结构框图，并注明使用的采样率和各模块的通带宽度。

第 4 章
z 变换

第 3 章讨论了理想采样。采样后的信号只在采样时间点上保持了原来信号的幅度；而且，只要满足采样定理，我们仍然可以恢复出原来的连续时域信号。所以，我们只需关注和分析采样时间点上的那些样点值。这就是本章要叙述的内容：z 变换把信号从连续时域带入离散时域。

4.1 已采样信号的拉普拉斯变换

我们重复第 3 章中的式(3-8)，并按照式(3-7) 把采样脉冲函数 $p(t)$ 表示为无数个 δ 函数之和：

$$x_S(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) \tag{4-1}$$

其中，$x_S(t)$ 为已采样信号，T 为采样周期。

在从连续时域转变到离散时域之前，假设 $t<0$ 时 $x(t)\equiv 0$。因为在后面将会看到，我们所遇到的绝大多数的信号都是这样的。而且，这个 $t=0$ 的时间点被用作信号的起始时间或参照时间。因此，式(4-1) 中的连加运算的下限可以从 $-\infty$ 变为 0。这样之后，式(4-1) 变为：

$$x_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) \tag{4-2}$$

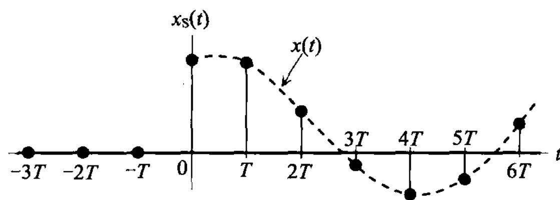


图 4-1 已采样信号 $x_S(t)$ 只在 $t\geqslant 0$ 时才不等于零

经过上面这样假设之后，图 3-8c 中的已采样信号 $x_S(t)$ 现在变成了图 4-1 中的样子。

对式(4-2) 两边同时取拉普拉斯变换后，得到：

$$X_S(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)e^{-st}dt \tag{4-3}$$

其中,$X_S(s)$ 为已采样信号 $x_S(t)$ 的拉普拉斯变换。

在把上式中的积分号与连加号交换位置之后,上式变为:

$$X_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t)\delta(t-nT)e^{-st}dt \tag{4-4}$$

在上式右边,积分式中的 n 可以暂时看作常量。这是因为每做一次积分的时候,连加号中的 n 值是固定的。

由于式(4-4) 右边 $\delta(t-nT)$ 的筛选特性,我们可以把积分区间缩小到 $t = nT$ 的邻域,这就是,积分区间变为从$(nT-\Delta)$ 到$(nT+\Delta)$,其中 $\Delta > 0$。这样,式(4-4) 变为:

$$X_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT-\Delta}^{nT+\Delta} x(t)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

现在假设上式中的Δ为一个无穷小,因此,被积函数中的$x(t)$ 和 e^{-st} 的值可以认为分别等于 $x(nT)$ 和 e^{-snT}。由于 $x(nT)$ 和 e^{-snT} 对于积分运算都是常数,就可以提到积分号之前。根据这些分析,上式可演算为:

$$X_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT-\Delta}^{nT+\Delta} x(nT)\delta(t-nT)e^{-snT}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \int_{nT-\Delta}^{nT+\Delta} \delta(t-nT)dt \tag{4-5}$$

显然,上式中最后那个积分是在计算 $\delta(t-nT)$ 在$[nT-\Delta, nT+\Delta]$ 区间内的面积;而这个面积一定等于 1,与 n 的取值无关。因此,上式可以容易地改写为:

$$\begin{aligned} X_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \\ &= x(0) + x(T)e^{-sT} + x(2T)e^{-2sT} + \cdots \end{aligned} \tag{4-6}$$

式(4-6) 就是已采样信号 $x_s(t)$ 的拉普拉斯变换。

在式(4-6) 中,$x(t)$ 的每一个采样值都被乘以一个不同的延迟因子 $\exp(-nsT)$。根据拉普拉斯变换的延迟性质,这个延迟因子表示采样值相对于 $t = 0$ 的时间延迟。比如,式(4-6) 中的指数项 e^{-2sT} 表示采样值 $x(2T)$ 是在 $t = 2T$ 时被采样的,比 $t = 0$ 晚了 $2T$ 的时间。所以,在把所有的采样值集合在一起的时候,就组成了一个有先后顺序的时间序列。

注解:拉普拉斯变换的延迟性质的意思是:把一个信号在时域内延迟时间 T,就等于对这个信号的拉普拉斯变换乘以 e^{-sT}。下面用 δ 函数来验证这个延迟性质。

首先,$\delta(t)$ 的拉普拉斯变换等于 1。把 $\delta(t)$ 延迟时间 T 之后的信号是 $\delta(t-T)$,其中 $T > 0$。根据拉普拉斯变换的定义,$\delta(t-T)$ 的拉普拉斯变换应该计算为:

$$X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t-T)e^{-st}dt \tag{4-7}$$

上式中,由于 $\delta(t-T)$ 的筛选特性,被积函数 $\delta(t-T)e^{-st}$ 只在 $t = T$ 的邻域不等于零。所以,上式的积分区间可以缩小到 $t = T$ 的一个邻域。这样,式(4-7) 可以改写为:

$$X(s) = \int_{T-\Delta}^{T+\Delta} \delta(t-T)e^{-st}dt \tag{4-8}$$

我们把上式中的 Δ 看成一个无穷小，所以，e^{-st} 可以认为等于 e^{-sT}，因而可以提到积分号之前。这样之后，式(4-8) 变为：

$$X(s) = e^{-sT}\int_{T-\Delta}^{T+\Delta}\delta(t-T)\mathrm{d}t \tag{4-9}$$

显然，式(4-9) 中的积分等于 1。所以，我们得到 $\delta(t-T)$ 的拉普拉斯变换：

$$X(s) = e^{-sT} \tag{4-10}$$

这就验证了拉普拉斯变换的延迟性质。

4.2　从拉普拉斯变换到 z 变换

我们已经得到了已采样信号 $x_S(t)$ 的拉普拉斯变换式(4-6)。现在想从连续时域进入离散时域是非常容易的，只要定义一个复变量 z：

$$z = e^{sT} \tag{4-11}$$

把式(4-11) 代入式(4-6) 的右边，得到：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots \end{aligned} \tag{4-12}$$

式(4-12) 就是我们想要的离散时域信号 $x(nT)$ 的 z 变换定义式，其中的 $x(nT)$ 是 $x_s(t)$ 在离散时间点上的值。由此可以看出，从连续时域向离散时域转变的过程中，已采样信号 $x_s(t)$ 扮演了关键性的角色。而式(4-11) 变量代换的一个好处是把式(4-6) 中复杂的指数函数变成了式(4-12) 中比较简单的幂函数。

在式(4-12) 中，右边的每一项 $x(nT)z^{-n}$ 都由两个因子组成：其中的 $x(nT)$ 为样点值，而 z^{-n} 为这个样点相对于起始时间的延迟。比如，$2.5z^{-8}$ 表示这样一个样点，它的值是 2.5，它出现的时间比信号起始时间晚(右移) 了 8 个采样周期。所以，z 变换中的 z^{-n} 与拉普拉斯变换中的 e^{-snT} 具有相同的功能：e^{-snT} 把一个连续时域信号延迟了时间 nT，而 z^{-n} 把一个离散时域信号延迟了 n 个采样周期 T。我们将在 4.5 节中仔细讨论 z 变换的延迟性质。

这里需要说明一点，z 变换的一般性定义是双边的，而式(4-12) 是单边的。在后文中将会看到，实际使用中的信号几乎都是单边的，因此，单边和双边是一样的。我们也可以把式(4-12) 中的累加下限扩展到 $-\infty$，因而得到双边的 z 变换定义式：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n} \tag{4-13}$$

下面 3 个离散序列都是在离散时域中经常用到的，也是离散时域中最简单的信号。我们来计算它们的 z 变换。

例 4-1　单位脉冲序列 $\delta(nT)$ 类似于连续时域中的 $\delta(t)$ 函数，但不能简单地认为 $\delta(nT)$ 是由 $\delta(t)$ 采样而得到的。它被定义为：

$$\delta(nT)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{4-14}$$

它的样点序列画在图 4-2a 中。把 $\delta(nT)$ 代入 z 变换的定义式(4-12)之后，可以得到 $\delta(nT)$ 的 z 变换：

$$X(z)=1+0\times z^{-1}+0\times z^{-2}+\cdots=1 \tag{4-15}$$

这个结果非常简单，非常有用，而且也等于连续时域中 $\delta(t)$ 的拉氏变换 $X(s)=1$。单位脉冲序列的 z 变换既没有零点，也没有极点，所以使用起来非常方便(零点与极点将在 5.5 节中讨论)。

例 4-2 单位阶跃序列 $u(nT)$ 可以认为是从连续时域的单位阶跃函数 $u(t)$ 采样而得到的。但 $u(t)$ 在 $t=0$ 处是不连续的。按照通常的规定，$u(t)$ 在这一点的值应该等于左右极限的平均值，即 $u(0)=0.5$；但我们在这里规定 $u(0)=1$。所以，单位阶跃序列 $u(nT)$ 被定义为：

$$u(nT)=1,\quad n\geqslant 0 \tag{4-16}$$

图 4-2b 画出了单位阶跃序列的样点。它的 z 变换可以根据 z 变换定义式(4-12) 计算为：

$$X(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

上式右边是一个等比级数；只有当公比 z^{-1} 的模小于 1 时才收敛。所以，这个等比级数的收敛条件是 $|z^{-1}|<1$，或者是 $|z|>1$。因此，单位阶跃序列的 z 变换是有收敛区域的，这个收敛区域是单位圆的外部。

在收敛域内，上式可以用等比级数求和公式化简为：

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1 \tag{4-17}$$

如果令上式右边的分母等于零，就得到它的极点 $z_p=1$。所以单位阶跃序列有一个极点在 $z=1$。

例 4-3 单位指数序列可以认为是从连续时域的单位指数函数采样而得到，它的表达式为：

$$x(nT)=a^n,\quad 0<a<1,\quad n\geqslant 0 \tag{4-18}$$

其中，$0<a<1$ 保证了单位指数序列的收敛性。它的样点序列画在图 4-2c 中。它的 z 变换为：

$$\begin{aligned}X(z)&=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots\\&=1+(a^{-1}z)^{-1}+(a^{-1}z)^{-2}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^{-n}\end{aligned} \tag{4-19}$$

把上式与上面的例 4-2 比较后可知，上式中的 $a^{-1}z$ 对应于例 4-2 中的 z。所以，上式可简化为：

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>a \tag{4-20}$$

式(4-20) 的收敛区域也是一个圆的外部。由于 $0<a<1$，这个圆在单位圆之内。所以，单位指数序列的 z 变换的收敛域要大于例 4-2 中单位阶跃序列的收敛域。这也可以从图 4-2b 和图 4-2c 看出：图 4-2b 中的样点保持不变，而图 4-2c 中的样点呈指数衰减。因此，图 4-2c 应该比图 4-2b 有较大的收敛域。

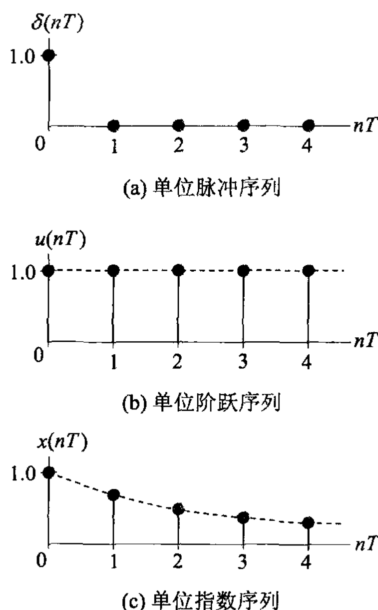


图 4-2　3个基本的离散序列

此外，单位指数序列的z变换的一个极点位于$z_p = a$。因为$0 < a < 1$，所以极点在单位圆内。具体地说，它的一个极点位于单位圆内的正实轴上，与原点的距离为a。此外，如果单位指数序列的a取值于-1与0之间，那么它的样点序列是振荡的，但也趋于零。

我们把单位阶跃序列和单位指数序列的极点画在图4-3中。可以看出，极点都不在收敛域内，因为离散时域信号的z变换在极点上是发散的。此外，表4-1给出了一些常用离散序列与它们的z变换之间的对照关系。

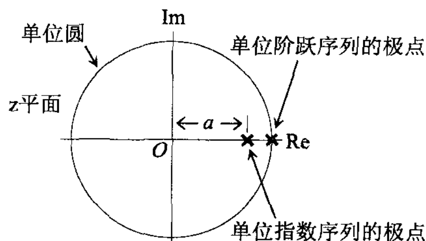


图 4-3　单位阶跃序列和单位指数序列的两个极点位置的比较

表4-1　常用离散序列的z变换

序　号	离散序列	z　变　换	收　敛　域
1	$\delta(n)$	1	所有z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
3	a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
4	$\cos(n\omega_0 T)$	$\frac{1-\cos(\omega_0 T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0 T)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
5	$\sin(n\omega_0 T)$	$\frac{\sin(\omega_0 T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0 T)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
6	$r^n\cos(n\omega_0 T)$	$\frac{1-r\cos(\omega_0 T)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0 T)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert r\rvert$
7	$r^n\sin(n\omega_0 T)$	$\frac{r\sin(\omega_0 T)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0 T)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert r\rvert$

4.3　s平面与z平面的映射

现在通过式(4-11)来说明拉普拉斯变换的定义域s平面与z变换的定义域z平面之间的映射关系。在拉普拉斯变换中，自变量s是一个复频率变量，可以用直角坐标写为：

$$s=\sigma+\mathrm{j}\omega \tag{4-21}$$

把式(4-21)代入式(4-11)之后，可以得到：

$$z=\mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} \tag{4-22}$$

上式把式(4-11)表示成了极坐标的形式。其中，$\mathrm{e}^{\sigma T}$为z的模，即，z平面上从原点到复数点z的复矢量的长度。ωT为这个复矢量的幅角，即，从实轴沿着正方向(逆时针)旋转到这个矢量位置时所扫过的弧度数。

通过式(4-21)和式(4-22)，可以把s平面与z平面关联起来。从式(4-21)来看，$\sigma>0$表示s平面的右半平面。在式(4-22)中，$\sigma>0$表示$\lvert z\rvert>1$(T总是大于零)，因而表示z平面上单位圆的外部。这样，s平面的右半平面就对应于z平面上单位圆的外部。或者说，s平面的右半平面映射到了z平面上单位圆的外部。同样还可以说，s平面的左半平面映射到了z平面上单位圆的内部，以及s平面上的虚轴映射到了z平面的单位圆上。图4-4画出了这个映射关系。通过把z变换与拉普拉斯变换联系起来，可以使我们沿用连续时域中信号处理的基本原理，也有助于对DSP基本概念的理解和掌握。

4.4　z变换的性质

这一节中，我们将叙述z变换的几个主要性质。对于这些性质，我们都可以在拉普拉斯变换中找到对应的性质，而且在下面对离散时域系统的分析中会经常使用。

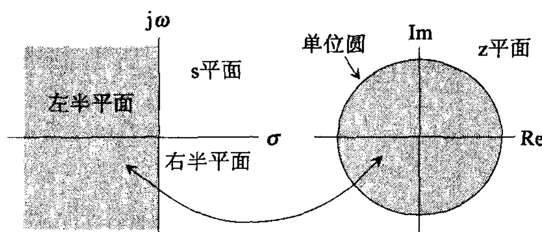


图4-4　s平面与z平面之间的映射

4.4.1 线性性质

z变换是一种线性操作。z变换的线性性质可以叙述为：两个离散时域序列线性和的z变换等于这两个离散时域序列z变换的线性和，并可以写为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}[Ax_1(nT)+Bx_2(nT)]z^{-n}=AX_1(z)+BX_2(z) \tag{4-23}$$

其中，A与B是两个任意常数，$X_1(z)$和$X_2(z)$分别是离散序列$x_1(nT)$和$x_2(nT)$的z变换。式(4-23)的证明是很容易的。因为在把式(4-23)左边的中括号展开、再把各项重新组合之后，就可以写为：

$$\text{式(4-23)的左边}=A\sum_{n=0}^{\infty}x_1(nT)z^{-n}+B\sum_{n=0}^{\infty}x_2(nT)z^{-n} \tag{4-24}$$

根据z变换的定义，式(4-24)右边的两个连加运算就是$X_1(z)$和$X_2(z)$，也就是，式(4-24)的右边等于式(4-23)的右边。所以，式(4-23)是正确的。

4.4.2 初值定理

z变换的初值定理与终值定理可以用来从$X(z)$快捷地看出离散序列$x(nT)$的时域特性，而不必通过复杂的z反变换。如果已经计算出了$X(z)$的反变换，那么，初值定理与终值定理可以用来对反变换做快速验证。

初值定理是这样说的：一个离散序列$x(nT)$的初值$x(0)$等于这个离散序列的z变换在z趋于无穷大时的极限，并可以简单地写为：

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z) \tag{4-25}$$

初值定理也是很容易证明的。因为根据z变换的定义式(4-12)，$X(z)$可以表示为：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}=x(0)+\sum_{n=1}^{\infty}x(nT)z^{-n}$$

对上式两边取$z\to\infty$的极限时，上式右边的连加部分趋于零，因而就得到式(4-25)。

4.4.3 终值定理

终值定理的意思是，一个离散序列$x(nT)$在经过无限长时间之后的样点值，等于它的z变换$X(z)$乘以$(1-z^{-1})$之后再令z趋于1时的极限，并可以写为：

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})X(z) \tag{4-26}$$

终值定理的证明比较繁复，我们只给出终值定理的一个结论：当 $X(z)$ 的所有极点都在单位圆内时，$x(nT)$ 的终值等于零；当 $X(z)$ 有一个极点在 $z = 1$ 处、而其他极点都在单位圆内时，$x(nT)$ 的终值为一个稳定的非零值；在其他所有情况下，$x(nT)$ 没有稳定的终值。

比如，对于例 4-2 中的单位阶跃序列使用式(4-26)之后，可以得到：

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})\frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 \tag{4-27}$$

所以，单位阶跃序列的终值等于 1；这与例 4-2 中的情况相符。

再比如，对于例 4-3 中的单位指数序列，由于它的唯一的一个极点在单位圆内，所以单位指数序列的终值等于零。这个结果与图 4-2c 中的情况也是一致的。

4.4.4 卷积定理

关于离散序列的卷积计算，我们将在 5.2 节中做比较详细的叙述。在这里，我们只是使用离散序列卷积的计算方法。而且，这个计算方法与连续时域中的卷积计算方法在原理上是一样的。

离散时域卷积定理是这样说的：如果离散序列 $w(nT)$ 是两个离散序列 $x(nT)$ 和 $y(nT)$ 之间的卷积：

$$w(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)y(nT - kT), \quad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \tag{4-28}$$

那么，$w(nT)$ 的 z 变换 $W(z)$ 就等于 $x(nT)$ 和 $y(nT)$ 的 z 变换 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 的乘积：

$$W(z) = X(z)Y(z) \tag{4-29}$$

其中，$W(z)$ 的收敛域是 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 收敛域的交集。

式(4-28)是离散时域卷积的一般表达式，其中的 n 和 k 都是从 $-\infty$ 变到 ∞。但是，我们在前面把离散序列的 z 变换定义为单边的，所以，在这里也假设离散序列 $x(nT)$ 和 $y(nT)$ 都是从 $n = 0$ 开始的；当 $n < 0$ 时，$x(nT)$ 和 $y(nT)$ 恒为零。因此，式(4-28)的卷积计算公式可以改写为：

$$w(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y(nT - kT), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4-30}$$

我们先用图 4-5 来说明式(4-30)中的卷积是如何进行的。图 4-5 中上面的序列为 $x(kT)$，随着 k 的递增，序列向右侧行进。下面的序列为 $y(nT - kT)$，随着 k 的递增，序列也向右行进，但与自己的横坐标是逆向的。当用式(4-30)计算 $w(nT)$ 的某一个值的时候，$y(nT - kT)$ 中的 n 可视为常数。比如在图 4-5 中，$y(nT - kT)$ 的纵坐标是与 $x(kT)$ 的 $k = 7$ 对准的。所以，$n = 7$，我们正在计算 $w(7T)$。

当使用式(4-30)计算 $w(7T)$ 的时候，k 从 0 变到 7[当 $k > 7$ 后，由于 $y(nT - kT) = 0$ 而不需计算]。当 $k = 0$ 时，对应于图 4-5 中最左边的那条虚线；上面的序列 $x(kT)$ 给出 $x(0)$，下面的序列 $y(nT - kT)$ 由于 $n = 7$ 而给出 $y(7T)$，两者的乘积被累加到累加器 Σ 中。然后，随着 k 从 1 递增到 7，总共还有 7 个乘积项被累加到 Σ 中，这样就得到 $n = 7$ 时的卷积值 $w(7T)$。图 4-5 中的双向箭头表示，当我们把 $y(nT - kT)$ 左右移动时，就可以

计算出 $w(nT)$ 的任意一个卷积值。

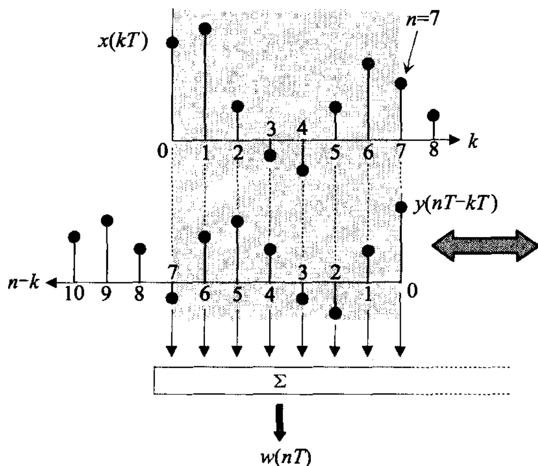


图 4-5　计算两个离散序列之间的卷积

在大概知道了卷积的计算过程之后，我们来证明这个卷积定理。对式(4-30)两边取z变换：

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)y(nT-kT)z^{-n} \tag{4-31}$$

其中，$W(z)$ 为 $w(nT)$ 的z变换。

式(4-31)右边的两个连加号可以交换位置。由于 $x(kT)$ 与 n 无关，就可以提到两个连加号之间。式(4-31)就变为：

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\sum_{n=0}^{\infty}y(nT-kT)z^{-n} \tag{4-32}$$

把上式中的 z^{-n} 分解为两个因子 z^{-k} 和 $z^{-(n-k)}$。由于因子 z^{-k} 与 n 无关，所以也可以移到两个连加号之间。这样，式(4-32)变为：

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}y(nT-kT)z^{-(n-k)} \tag{4-33}$$

对于上式中的第二个连加运算，我们使用变量代换 $m=n-k$，也就是 $n=m+k$。因此，式(4-33)变为：

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}\sum_{m=-k}^{\infty}y(mT)z^{-m} \tag{4-34}$$

在上式的第二个连加运算中，离散序列 $y(mT)$ 是从 $m=0$ 开始才不等于零的，而从第一个连加运算可知，k 是非负的，所以，第二个连加运算的下限可以修改为 $m=0$。这样，式(4-34)可以改写为：

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}y(mT)z^{-m} \tag{4-35}$$

现在，第二个连加运算已经与第一个连加运算中的变量 k 没有任何关系了，因此，

这两个连加运算可以看成是相互独立的两个因式。而且，上式中的两个连加运算正好是两个离散序列 $x(nT)$ 和 $y(nT)$ 的 z 变换 $X(z)$ 和 $Y(z)$。这就证明了离散时域中的卷积定理。对于双边的 z 变换，证明的过程是一样的。

除了上面这些性质之外，z 变换还有其他一些性质，比如"延迟操作"。由于延迟操作的重要性，我们用单独的一节来叙述。

4.5 延迟操作

延迟操作的性质可以叙述为：把一个离散序列延迟 n 个采样周期，等价于对这个离散序列的 z 变换乘以 z^{-n}。为了便于说明，我们使用一个具体的延迟操作：延迟 3 个采样周期。

我们要证明的延迟操作的性质，现在可以叙述为：把一个离散序列 $x(nT)$ 延迟 3 个采样周期，就等于使这个离散序列 $x(nT)$ 的 z 变换 $X(z)$ 乘以 z^{-3}。这个 z^{-3}（或者 z^{-n}）叫做延迟算符，而最简单的延迟算符是只引起一个采样周期延迟的"单位延迟"z^{-1}，它在离散时域系统中是经常出现的。

我们先把离散序列 $x(nT)$ 和延迟了 3 个采样周期之后的离散序列 $x_{D3}(nT)$ 画在图 4-6 中；其中，$x_{D3}(nT)$ 的下标 D3 表示延迟了 3 个采样周期。由于原来的离散序列 $x(nT)$ 在 $n<0$ 时恒为零，所以，新的离散序列 $x_{D3}(nT)$ 的最前面 3 个样点也都是零。

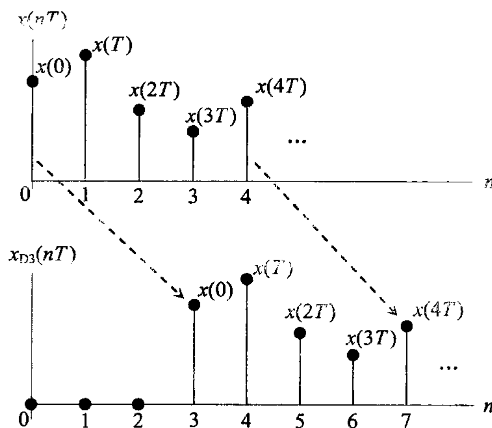


图 4-6 延迟操作前后的样点序列

要证明延迟效应是很简单的。首先写出原来离散序列 $x(nT)$ 的 z 变换：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n} \tag{4-36}$$

我们也可以写出新的离散序列 $x_{D3}(nT)$ 的 z 变换：

$$X_{D3}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x_{D3}(nT)z^{-n} \tag{4-37}$$

由于 $x_{D3}(nT)$ 的前3个样点都等于零，所以式(4-37)中的连加运算可以从第四个样点 $x_{D3}(3T)$ 开始。因此，上式变为：

$$X_{D3}(z)=\sum_{n=3}^{\infty}x_{D3}(nT)z^{-n} \tag{4-38}$$

因为 $x_{D3}(nT)$ 是由 $x(nT)$ 延迟3个样点之后得到的，所以，可以根据图4-6确定出 $x_{D3}(nT)$ 和 $x(nT)$ 之间存在下面的关系：

$$\begin{cases}x_{D3}(3T)=x(0)\\x_{D3}(4T)=x(T)\\x_{D3}(5T)=x(2T)\\\vdots\end{cases} \tag{4-39}$$

这个关系可以用通式写为：

$$x_{D3}(nT)=x(nT-3T),\quad n\geqslant 3 \tag{4-40}$$

把式(4-40)代入式(4-38)之后，可以得到：

$$X_{D3}(z)=\sum_{n=3}^{\infty}x(nT-3T)z^{-n}$$

使用变量代换，令 $m=n-3$，因此 $n=m+3$。这样，上式可以改写为：

$$X_{D3}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}x(mT)z^{-(m+3)}=z^{-3}\sum_{m=0}^{\infty}x(mT)z^{-m}$$

显然，上式右边的连加运算就是 $x(nT)$ 的z变换。

我们最后得到：

$$X_{D3}(z)=z^{-3}X(z) \tag{4-41}$$

在把延迟3个样点时间推广到延迟任意多个样点时间之后，式(4-41)变为：

$$X_{D}(z)=z^{-n}X(z) \tag{4-42}$$

式(4-42)就是关于延迟操作性质的z变换表达式。它的意思是，一个离散序列被延迟了 n 个样点周期之后，它的z变换等于原来离散序列的z变换乘以 z^{-n}。下面的例4-4将具体说明离散序列之间的延迟关系以及完整的信号处理过程。

例4-4　图4-7是一个非常简单的数字滤波器的实现框图(第7章将对实现框图做比较详细的讨论)。$x(nT)$ 为系统的输入序列，要求计算出滤波器的输出序列 $y(nT)$。

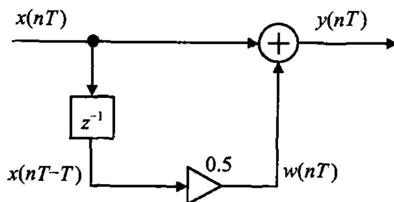


图4-7　一个简单滤波器的框图

我们先来分析图4-7中各离散序列之间的时间关系。图4-7中共有4个离散序列：$x(nT)$、

$x(nT-T)$、$w(nT)$ 和 $y(nT)$。$x(nT)$ 是输入序列。序列 $x(nT-T)$ 是从 $x(nT)$ 延迟 1 个采样周期后得到的，可以认为与 $x(nT)$ 是同一个离散序列。$w(nT)$ 是将 $x(nT-T)$ 经过比例缩放后得到的一个序列。所以，它与 $x(nT)$ 和 $x(nT-T)$ 是不同的离散序列。图 4-7 中的最后一个序列是 $y(nT)$，它由 $x(nT)$ 和 $w(nT)$ 相加而成，所以 $y(nT)$ 也是不同的序列。总起来说，这个滤波器中有 3 个不同的离散序列：$x(nT)$ 与 $x(nT-T)$、$w(nT)$、$y(nT)$。

与所有的 DSP 系统一样，滤波器的操作是按采样周期的顺序进行的。当得到一个输入样点时，滤波器即启动一个采样周期的操作。当一个采样周期内的操作完成之后，滤波器就进入闲置状态，等待下一个样点的到来。我们从滤波器的第一个采样周期开始。

当 $n=0$ 时，滤波器进入第一个采样周期。这时，$x(nT)=x(0)$，在图 4-8 中等于 1。但这时的单位延迟 z^{-1} 中的记忆是空白的。通常的做法是，在系统启动时，把所有单位延迟 z^{-1} 的记忆都初始化为零。所以，这时由单位延迟 z^{-1} 提供给 $x(nT-T)$ 的样点值是零，即 $n=0$ 时，$x(nT-T)$ 等于零。因此，$w(0)$ 也等于零。最后的输出 $y(0)=x(0)+w(0)=1$。在结束这个样点周期的操作之前，单位延迟 z^{-1} 要把 $x(0)$ 保存在它的记忆里，以便在下一个采样周期开始时把 $x(0)$ 交给 $x(nT-T)$。

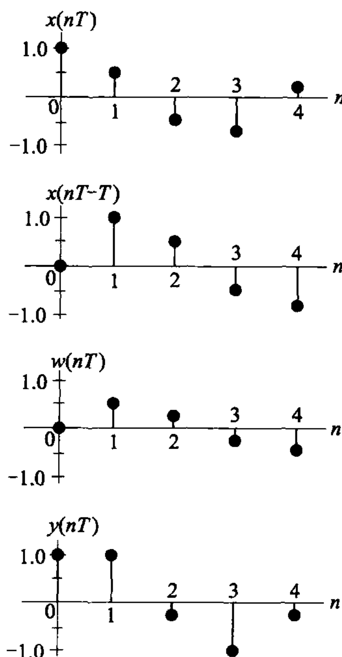


图 4-8 一个简单滤波器中的各个数字信号的样点序列

当 $n=1$ 时，滤波器进入第二个采样周期。这时，$x(nT)=x(T)$，在图 4-8 中等于 0.5。单位延迟 z^{-1} 把前一采样周期中记忆的 $x(0)$ 交给 $x(nT-T)$。所以，这时的 $x(nT-T)=x(0)=1$。$w(nT)$ 应该等于此时的 $x(nT-T)$ 的一半，即 $w(nT)=0.5x(0)=0.5$。最后，$y(nT)=x(T)+w(T)=0.5+0.5=1$。当第二个输出样点计算完毕时，$x(T)$ 被单位延迟 z^{-1} 记忆起来。接下来的 $x(nT)$ 的值如图 4-8 中那样，分别为 $x(2T)=-0.5$、$x(3T)=-0.8$、$x(4T)=0.2$。通过计算，滤

波器的输出依次为 $y(2T)=-0.25$、$y(3T)=-1.05$、$y(4T)=-0.2$。

我们把这个滤波器的前5个样点周期内的操作结果表示在图4-8和表4-2中。从这两个图表中可以了解到离散时域系统的一般操作过程。在第5章中，会经常遇到离散序列的分析与计算，也许要复杂一些，但基本的过程是一样的。

表 4-2　滤波器中的各个离散序列

n	0	1	2	3	4
$x(nT)$	1.0	0.5	−0.5	−0.8	0.2
$x(nT-T)$	0.0	1.0	0.5	−0.5	−0.8
$w(nT)$	0.0	0.5	0.25	−0.25	−0.4
$y(nT)$	1.0	1.0	−0.25	−1.05	−0.2

4.6　z 反变换

我们一般是从离散序列计算出 z 变换，但有时也需要从 z 变换还原出它的离散序列。从离散序列的 z 变换计算出原来的离散序列的过程，叫做 z 反变换。我们先说明 z 反变换的计算公式是如何导出的。

z 反变换的原理是复变函数理论中的柯西积分定理。对于 z 反变换，柯西积分定理可以写为：

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{k-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}1, & k=0\\0, & k\neq 0\end{cases}\tag{4-43}$$

其中，Γ 为一条在被积函数 z^{k-1} 收敛域内沿着逆时针方向且包含原点在内的闭合路径。式(4-43)的意思是，当 $k=0$ 时，被积函数等于 z^{-1}，因而积分等于 $2\pi j$；当 $k\neq 0$ 时，由于被积函数不等于 z^{-1}，积分一概为零。

所以，要想从 $X(z)$ 找出 $x(n)$，就只要对 $X(z)$ 乘以 $z^{k-1}/2\pi j$，然后沿着收敛域内的一条恰当的闭合曲线做积分。这可以写为：

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z\tag{4-44}$$

把式(4-44)中的 $X(z)$ 用式(4-12)的右边代替，可以写成连加运算的形式。在把 z^{k-1} 乘进连加运算之后，式(4-44)变为：

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n+k-1}\mathrm{d}z$$

对于上式右边，在交换了积分号与连加号之后（这种交换一般是可以的），被积函数中的 $x(n)$ 对于闭合积分是一个常数，所以可以提到积分号之前。根据这个分析，式(4-44)可以继续演算为：

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi j}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\oint_{\Gamma} z^{-n+k-1}\mathrm{d}z\tag{4-45}$$

在式(4-45)右边，随着 n 从 0 变到 ∞，要对无数次的积分值进行累加。但根据式(4-43)的柯西积分定理，只有当 $n=k$ 时，积分才等于 $2\pi j$，n 为其他正整数时的积分一概为零。所以，式(4-45)变为：

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z = x(k) \tag{4-46}$$

在式(4-46)中把 k 改为 n，就得到 z 反变换的计算公式：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \tag{4-47}$$

式(4-47)中的积分路径 Γ 是不难找到的，因为 $X(z)$ 的收敛域都是一些以原点为中心的圆环或圆的外部。

例 4-5 在例 4-3 中，我们计算了单位指数序列的 z 变换：

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > a \tag{4-48}$$

现在要求找出它的 z 反变换。

在利用了 z 反变换计算公式(4-47)之后，式(4-48)中 $X(z)$ 的 z 反变换可以计算为：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{z^{n}}{z-a}\mathrm{d}z \tag{4-49}$$

式(4-49)中，被积函数只在 $z=a$ 处有一个极点，而且，从例 4-3 可知，$0<a<1$，因此，$X(z)$ 的收敛域为 $|z|>a$。所以，式(4-49)中的积分闭合路径可以选择为单位圆。

在对式(4-49)使用留数定理之后，就可得到：

$$x(n) = a^{n} \tag{4-50}$$

这个结果是与例 4-3 中的单位指数序列相符的。

虽然式(4-47)的 z 反变换计算公式比较简单，但有时计算会非常困难。所以，我们来看两个简单实用的方法：长除法和部分分式法。

4.6.1 长除法

长除法是把一个表示为分式的 z 变换变成一个多项式，因而就知道了相应的离散序列。我们用一个例子来说明长除法的计算过程。

例 4-6 有一个 z 变换：

$$X(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}} \tag{4-51}$$

要求用长除法计算它的离散序列。

这个 z 变换有如下的长除法计算过程：

$$
\begin{array}{r}
1-0.5z^{-1}+0.25z^{-2} \\
1+0.5z^{-1}\overline{)\,1\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{1+0.5z^{-1}} \\
-0.5z^{-1} \\
\underline{-0.5z^{-1}-0.25z^{-2}} \\
-0.25z^{-2} \\
\underline{-0.25z^{-2}+0.125z^{-3}} \\
-0.125z^{-3}
\end{array}
$$

所以，式(4-51) 中的 $X(z)$ 也可以写为：

$$X(z)=1-0.5z^{-1}+0.25z^{-2}+\cdots \tag{4-52}$$

根据 z 变换的定义，我们得到 $X(z)$ 的 z 反变换：$x(0)=1$、$x(1)=-0.5$、$x(2)=0.25$、…。

4.6.2　部分分式法

部分分式法是把一个 z 变换的分式分解为若干个分式之和，而分解之后的每一个分式都可以通过 z 变换表找到对应的离散序列。我们用下面的两个例子来说明如何用部分分式法完成 z 反变换。

例 4-7　要求找出下面 z 变换的 z 反变换：

$$X(z)=\frac{1+0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \tag{4-53}$$

我们把上式写成下面的形式：

$$X(z)=\frac{A}{1-0.5z^{-1}}+B \tag{4-54}$$

把上式右边合并为一个分式，然后将其分子与式(4-53) 的分子进行比较，并得到：

$$\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

所以，式(4-54) 可以写为：

$$X(z)=\frac{2}{1-0.5z^{-1}}-1 \tag{4-55}$$

根据表 4-1 中的第一行和第三行，得到式(4-53) 的 z 反变换：

$$x(n)=2\times0.5^{n}-\delta(n) \tag{4-56}$$

上式也可写为：$x(0)=1$、$x(1)=1$、$x(2)=0.5$、$x(3)=0.25$、$x(4)=0.125$、…。

例 4-8　要求找出下面 z 变换的 z 反变换：

$$X(z)=\frac{3}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})} \tag{4-57}$$

我们把上式分解为两个分式之和：

$$X(z)=\frac{A}{1-z^{-1}}+\frac{B}{1-0.5z^{-1}} \tag{4-58}$$

对上式右边通分，并将其分子与式(4-57)的分子比较之后，可以得到：

$$\begin{cases} A = 6 \\ B = -3 \end{cases} \tag{4-59}$$

把式(4-59)代入式(4-58)之后，式(4-58)变为：

$$X(z) = \frac{6}{1-z^{-1}} - \frac{3}{1-0.5z^{-1}} \tag{4-60}$$

根据表4-1中第二行和第三行，可以得到这两个分式对应的离散序列：

$$\begin{cases} \dfrac{6}{1-z^{-1}} \Rightarrow 6 \\ \dfrac{-3}{1-0.5z^{-1}} \Rightarrow -3 \times 0.5^n \end{cases} \tag{4-61}$$

因此，式(4-57)的z反变换是：

$$x(n) = 6 - 3 \times (0.5)^n \tag{4-62}$$

或者写成：$x(0) = 3$、$x(1) = 4.5$、$x(2) = 5.25$、$x(3) = 5.625$、…。

小结

- 被采样了的模拟信号仍然是连续时域信号。在保留了 $t = nT$ 时间点上的非零值、并略去所有其他时间上的零值之后，就从连续时域进入到了离散时域。这就是从拉普拉斯变换到z变换的过程。
- 从连续时域进入离散时域的过程中，已采样信号 $x_S(t)$ 起到了关键性的作用，因为它具有连续时域和离散时域的双重特性。
- 讨论了s平面与z平面之间的映射关系。
- 叙述了z变换的主要性质和3个最基本的离散时间序列。
- 讨论了离散时域中的延迟操作 z^{-n}，它与连续时域中的 e^{-nsT} 具有相同的延迟效应。
- 最后讨论了z反变换的计算方法，其中的长除法和部分分式法是两个简单实用的z反变换方法。

习题

4.1 写出下列有限长离散序列的z变换：

(1) $x(0) = 1.2$、$x(T) = -1.3$、$x(2T) = 0.5$、$x(3T) = 2.6$、$x(4T) = 0$。

(2) $x(0) = 1$、$x(T) = 2.5$、$x(2T) = 0.8$、$x(3T) = -0.8$、$x(4T) = 1.5$、$x(5T) = 2.2$。

4.2 找出下面有限长离散序列的z变换：

$x(n) = a^n[u(n) - u(n-N)]$，$N > 0$。

4.3 试确定与下列z变换对应的离散序列的各样点值：

(1) $1 + 5z^{-1} - 1.8z^{-3} - 3z^{-5}$

(2) $(2-0.5z^{-1})^2$

(3) $2(1-z^{-1})(1-z^{-2})-2.2z^{-3}-3.6z^{-5}$

4.4　计算下列z变换的z反变换：

(1) $X(z)=3z^{-2}/(1-0.8z^{-1})$

(2) $X(z)=2(1+0.1z^{-1})/[(1-0.5z^{-1})(1+0.7z^{-1})]$

4.5　假设$x(nT)$的z变换为$X(z)$，试证明$a^n x(nT)$的z变换是$X(z/a)$。

4.6　假设$x(nT)$的z变换为$X(z)$，试证明$nx(nT)$的z变换是$-z\mathrm{d}X(z)/\mathrm{d}z$。

4.7　利用表4-1中的第三对z变换，推导出第四对和第五对z变换。

4.8　证明下列z变换关系。

(1) $x^*(n)$的z变换是$X^*(z^*)$，其中 * 表示共轭复数。

(2) $x(-n)$的z变换是$X(1/z)$，用双边z变换证明。

第 5 章 离散时域系统

在第 4 章引入了 z 变换之后，就可以对离散时域系统进行分析与描述。我们将使用几种不同的分析方法，包括单位冲击响应、卷积、系统传递函数、频率响应、差分方程等。虽然每一种方法在推导和使用时都有自己的特点，但它们所描述的都是系统的输入与输出之间的关系，这可以简单地表示为图 5-1。

由于一个离散时域系统中的采样周期一般都是固定不变的，为了简洁起见，我们从现在起将尽可能地略去离散序列表达式中的采样周期 T，比如，把 $x(nT)$ 写为 $x(n)$，但含义没有改变。此外，离散时域系统可以简称为离散系统，离散时域序列可以简称为离散序列。

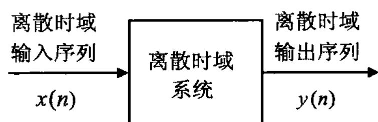


图 5-1　离散时域系统及其输入与输出

5.1 离散时域系统的性质

我们在数字信号处理中所讨论的离散时域系统仅限于一类最常见的离散时域系统，即“移不变”的、“因果性”的和“线性”的离散时域系统。下面解释这 3 个性质。

5.1.1 移不变系统

移不变系统是这样定义的：如果一个离散系统的输入与输出之间的关系不随时间而改变，那么，这样的离散系统就叫做移不变系统。换句话说，对于一个移不变的离散系统，如果它的一个输入信号在时间上超前或滞后了 n_0 个采样周期，那么，它的输出信号也一定超前或滞后同样的 n_0 个采样周期。

我们可以用等式来描述移不变系统。假设一个离散系统的输入与输出之间的关系为：

$$y(n)=\Psi[x(n)] \tag{5-1}$$

如果对于任意的整数 n_0 一定有：

$$y(n-n_0)=\Psi[x(n-n_0)] \tag{5-2}$$

那么，这个离散时域系统就叫做移不变系统。

上式中，$\Psi[\cdot]$是一个表示离散系统功能的操作符，它把离散系统的输入序列$x(n)$变换成离散系统的输出序列 $y(n)$。

我们一般见到的离散系统都是移不变的。但如果一个离散系统的参数（如滤波系数）随时间而变化，那么这样的离散系统就不是移不变系统。

5.1.2 因果性系统

因果性系统的意思是，系统在某时刻的输出只取决于当前和过去的输入样点，而与将来的输入样点无关。我们也可以用等式来描述这个“因果性”。

假设一个离散系统有两个输入序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，而且，由这两个输入序列分别产生的输出序列为 $y_1(n)$和 $y_2(n)$。如果这两个输入序列在时间 n_0T 之前完全相等：

$$x_1(n)=x_2(n),\quad n\leqslant n_0 \tag{5-3}$$

就一定有两个输出序列在时间 n_0T 之前完全相等：

$$y_1(n)=y_2(n),\quad n\leqslant n_0 \tag{5-4}$$

那么，这个离散系统是因果性的。

式(5-3)和式(5-4)也可以解释为：两个输出序列$y_1(n)$和$y_2(n)$在 n_0T 时间点之前完全相同，不受两个输入序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$在时间点 n_0T 之后的样点的影响。退一步说，即使两个输入序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$在 n_0T 之后差别很大，也不会使两个输出序列 $y_1(n)$和$y_2(n)$在 n_0T 之前有任何不同。

因果性说的是事情的前因后果。当某个样点还没有到达系统时，它是不可能影响系统的。实际的 DSP 系统或数字滤波器都是因果性的。但有时为了分析的目的，我们也会使用非因果性系统。

5.1.3 线性系统

离散系统的线性性质的定义非常简单：系统满足叠加原理。具体地说，如果两个输入序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$分别产生两个输出序列 $y_1(n)$和 $y_2(n)$，那么，由这两个输入序列的线性组合 $a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$所产生的输出序列 $y(n)$也一定等于两个输出序列 $y_1(n)$和 $y_2(n)$的线性组合 $a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$，其中，a_1和 a_2为两个任意常数。

我们也可以用等式来描述。对于一个离散线性系统，如果

$$\begin{cases} y_1(n)=\Psi[x_1(n)] \\ y_2(n)=\Psi[x_2(n)] \end{cases} \tag{5-5}$$

就一定有

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=y(n)=\Psi[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] \tag{5-6}$$

为了进一步理解线性叠加的性质，我们来对线性与非线性做一个比较，而所用的例子是一个非常简单的电学问题，这就是图 5-2 中电阻与二极管之间的特性对比。

电阻是线性的。它的伏安特性如图 5-2 中的直线所示。只要电阻两端增加 1 V 电压（如图 5-2 中从 0 V 增加到 1 V，或者从 1 V 增加到 2 V），流过 1 kΩ 电阻的电流就必

定增加 1 mA，与当时电阻中已经流过的电流大小无关。二极管的情况就不一样。当电压从 0 V增加到 1 V 时，图中的二极管电流增加了 0.1 mA；而当电压从 1 V 增加到 2 V 时，电流则增加了 1.1 mA。所以，二极管是非线性的，它的伏安特性是弯曲的。究其原因，二极管的导电特性受到二极管工作状态的影响。由此，我们可以进一步说，所谓线性系统是指那些输入与输出之间的关系不受系统状态影响的系统。

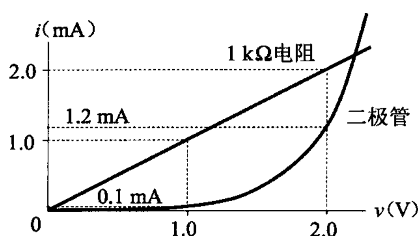


图 5-2 线性与非线性的区别

5.2 卷积

卷积是一个重要的时域分析方法，它所完成的功能是从系统的输入序列计算出系统的输出序列。我们将会看到，卷积计算利用了上面叙述的离散系统的移不变、因果性和线性叠加的性质。但从另一方面看，卷积计算是依靠离散系统的单位冲击响应完成的。

5.2.1 单位冲击响应

单位冲击响应是指一个离散系统以单位脉冲序列 $\delta(n)$ 为输入时所得到的输出序列 $h(n)$。单位脉冲序列 $\delta(n)$ 曾经在第 4 章的例 4-1 中叙述过，它被定义为：

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n>0\end{cases} \tag{5-7}$$

如果把单位脉冲序列 $\delta(n)$ 用作图 5-1 中的输入信号 $x(n)$，那么，图 5-1 中的输出信号 $y(n)$ 就叫做离散系统的单位冲击响应 $h(n)$。我们把单位脉冲序列 $\delta(n)$ 与单位冲击响应 $h(n)$ 的关系另外画在图 5-3 中。图 5-3 中的输出序列 $h(n)$ 只是一个具体的例子，冲击响应 $h(n)$ 的所有 $n<0$ 的样点都等于零，表示了离散系统是因果性的。

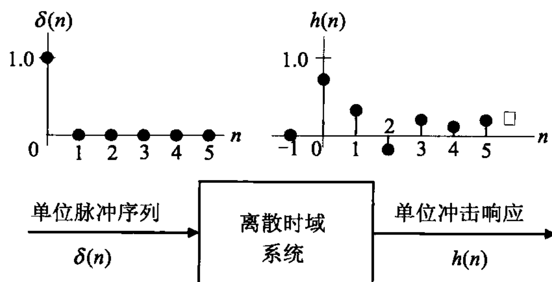


图 5-3 由单位脉冲序列产生单位冲击响应

5.2.2　把输入序列分解为 δ 序列

作为卷积分析的第一步，我们把输入序列分解为许多个 δ 序列的叠加，如图5-4所示。图中上面的 $x(n)$ 为离散系统的输入序列。我们把它的前4个样点分解为4个 δ 序列，并画在图中 $x(n)$ 的下面。

分解出来的第一个序列为图中的 $x(0)\delta(n)$。$x(0)\delta(n)$ 的意思是：它是一个 δ 序列，而 $x(0)$ 是一个常量，可以看作 $\delta(n)$ 的比例因子。因此，这个序列只有当 $n=0$ 时的样点等于 $x(0)$，其他所有样点都为零。图中下面的3个序列也有相同的含义。比如，对于图中的第四个 δ 序列 $x(3)\delta(n-3)$，$x(3)$ 也只是一个比例因子，而且，这个 δ 序列只有当 $n=3$ 时的样点等于 $x(3)$，其他样点都为零。总起来说，图5-4中从 $x(0)\delta(n)$ 到 $x(3)\delta(n-3)$ 的这4个单位脉冲序列在 $n=0$、1、2、3的4个采样时刻分别等于 $x(0)$、$x(1)$、$x(2)$、$x(3)$。这与图5-4中 $x(n)$ 的样点值是一样的。

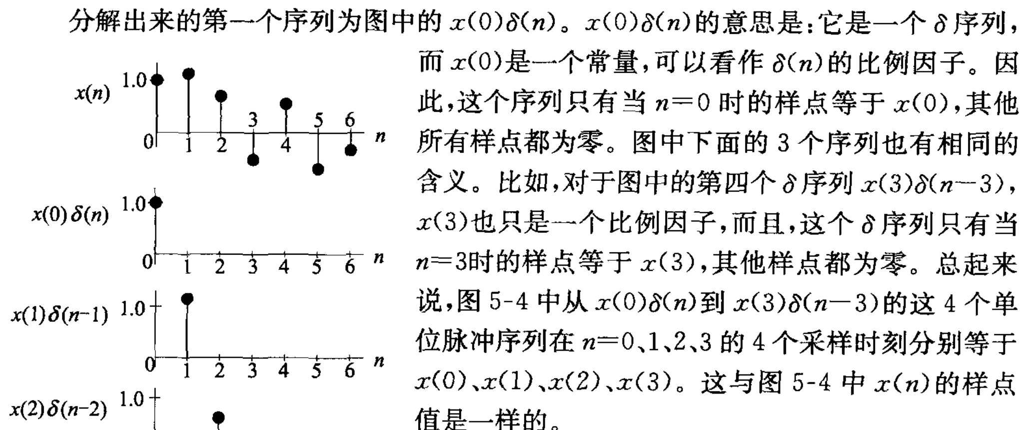


图5-4　把输入信号分解为许多单位脉冲序列

为了图形的清晰，我们只画出图5-4中每个 δ 序列中那个不为零的样点，而略去了所有其他的零样点。图中输入信号 $x(n)$ 的后面3个样点 $x(4)$、$x(5)$ 和 $x(6)$ 也同样可以分解为3个 δ 序列。总之，输入信号的每一个样点都可以分解为一个独立的 δ 序列。

5.2.3　把每个 δ 序列转换成输出序列

现在把这些分解出来的 δ 序列逐个地输入到图5-3那样的离散系统中，因而可以得到相同个数的输出序列，如图5-5所示。图中最上面的样点序列为离散系统的单位冲击响应 $h(n)$。在这个具体的 $h(n)$ 中，只有前3个样点 $h(0)$、$h(1)$ 和 $h(2)$ 不为零。同样为了使图形清晰，我们略去了图5-5中每个输出序列中的所有零样点。

先计算由第一个输入序列 $x(0)\delta(n)$ 产生的输出序列。根据图5-3中 $\delta(n)$ 与 $h(n)$ 之间的关系，并使用图5-5中具体的单位冲击响应 $h(n)$，可以计算出相应的输出序列：

$$y_0(n)=x(0)h(n),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5-8}$$

这就是图5-5中的第一个输出序列 $y_0(n)$。显然，式(5-8)中利用了线性系统的叠加原理：因为由 $\delta(n)$ 产生了 $h(n)$，所以，由 $x(0)\delta(n)$ 就一定产生 $x(0)h(n)$。此外，因为规定了所讨论的系统是因果性的，所以当 $n<0$ 时，$h(n)$ 恒等于零。因此，$y_0(n)$ 从 $n=0$ 开始才有非零输出。而且，由于这个具体的 $h(n)$ 只有3个不为零的样点，所以当 $n>2$ 之后，$y_0(n)$ 的输出样点全为零。

同样，由第二个输入序列 $x(1)\delta(n-1)$ 产生的输出序列为：

$$y_1(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ x(1)h(n-1) & n=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{5-9}$$

上式中，由因果性可知，只有从 $n=1$ 开始，$h(n-1)$ 才不为零。比如，当 $n=1$ 时，$h(n-1)=h(0)$；这时，$y_1(n)$ 得到了由输入序列 $x(1)\delta(n-1)$ 产生的第一个输出样点 $x(1)h(0)$。当 $n=2$ 的时候，$y_1(n)$ 得到了第二个输出样点 $x(1)h(1)$，…。这就组成了图 5-5 中的输出序列 $y_1(n)$。

对于输入序列 $x(2)\delta(n-2)$，同样可以写为：

$$y_2(n)=\begin{cases}0 & n=0,1\\ x(2)h(n-2) & n=2,3,4,\cdots\end{cases} \tag{5-10}$$

只有当 $n>1$ 之后这个输出序列才有不为零的输出。这是图 5-5 中的输出序列 $y_2(n)$。

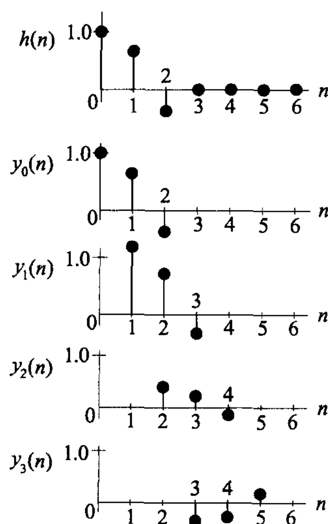


图 5-5 由每个单位脉冲序列产生的输出离散序列

对于从 $x(n)$ 分解出来的第 k 个 δ 序列 $x(k)\delta(n-k)$，它产生的输出序列可以写为：

$$y_k(n)=\begin{cases}0 & n=0,1,2,\cdots,k-1\\ x(k)h(n-k) & n=k,k+1,k+2,\cdots\end{cases} \tag{5-11}$$

其中，只有当 $n=k$ 时输入序列 $x(k)\delta(n-k)$ 才产生它的第一个输出样点 $x(k)h(0)$。在 $n=k+1$ 时给出第二个输出样点 $x(k)h(1)$。然后，给出第三个输出样点 $x(k)h(2)$，依次类推。

5.2.4 用输出序列合成卷积输出

现在把由每一个 δ 序列产生的各个输出序列叠加起来，就得到总的系统输出序列：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} y_k(n)=\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) \tag{5-12}$$

式(5-12)就是用来计算离散系统输出序列的卷积公式。由于此时我们正在计算输出序列中的第 n 个样点，所以，n 可以暂时看作固定的。每当 n 固定之后，就使 k 从 0 变到 n。这与前面从式(5-8)到式(5-11)的那 4 个计算式的情况正好相反；在那里，k 是固定的，n 是递增的。

我们对卷积公式(5-12)做一个解释：在输入序列 $x(n)$ 的激励下，离散系统的输出序列中的第 n 个样点 $y(n)$，是由从 $x(0)$ 到 $x(n)$ 的 $n+1$ 个输入样点分别产生的 $(n+1)$ 个输出样点叠加而成的。其中，第一个到达系统的输入样点为 $x(0)$，它对此时的系统输出样点 $y(n)$ 的贡献是 $x(0)h(n)$；第二个到达系统的输入样点的贡献是 $x(1)h(n-1)$，等等。最后到达系统的输入样点是 $x(n)$，它对系统此时输出的贡献是 $x(n)h(0)$。式(5-12)中连加号的下限设为零，是因为输入信号是从 $n=0$ 开始加到系统输入端的。连加号的上

限设为 n，是因为当 $k>n$ 时，$n-k<0$；对于一个因果性系统，…、$h(-3)$、$h(-2)$、$h(-1)$ 一定都等于零。

式(5-12)中的卷积计算是按照 k 从 0 变到 n，因而是按照输入样点从 $x(0)$ 变到 $x(n)$ 的顺序进行的。我们也可以有另一种卷积计算顺序，即让 k 从 n 逆向变到 0，因而，输入序列从 $x(n)$ 逆向变到 $x(0)$，但系统冲击响应则从 $h(0)$ 顺向变到 $h(n)$。按照这种计算顺序的卷积公式可以写为：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} x(n-k)h(k) \tag{5-13}$$

式(5-13)可以解释为：系统的输出序列在采样时刻 nT 时的样点值 $y(n)$，是由各个输入样点在 nT 时刻的冲击响应样点叠加而成的，其中，$h(0)$ 的贡献依靠了最后到达系统的输入样点 $x(n)$，所以 $h(0)$ 的贡献是 $x(n)h(0)$。相应地，$h(1)$ 的贡献是 $x(n-1)h(1)$，依次类推，直到 $x(0)h(n)$。式(5-12)和式(5-13)都是计算离散系统输出序列的卷积公式，两者的结果是完全一样的。

5.2.5　本意的卷积算法

读者也许发现，上面讨论的卷积计算方法有些过于繁复。因为当计算系统的某一个输出样点 $y(n)$ 时，必须画出所有输入样点的输出响应[即图 5-5 中许多的 $y_k(n)$]，然后才可以通过叠加而计算出系统输出的一个样点。

按照卷积的本意，我们应该把单位冲击响应 $h(k)$ 的时间轴倒转过来，这时的 $h(k)$ 就变为 $h(-k)$；再水平移动 $h(-k)$，使它的纵坐标与 $x(k)$ 中的某个 k 值对齐，而这个 k 等于 $y(n)$ 中的 n。所以，这时的 $h(-k)$ 就变为 $h(n-k)$。然后就可以计算出 $h(n-k)$ 与 $x(n)$ 重叠部分的乘累加和。这就是图 5-6 左边的情况。图 5-6 中的 n 等于 3，所以我们正在计算 $y(3)$。这时，$h(n-k)$ 变为 $h(3-k)$。根据式(5-12)，有下面的计算顺序：先使 $k=0$，计算出 $x(0)h(3)$；再使 $k=1$，计算出 $x(1)h(2)$；再使 $k=2$，计算出 $x(2)h(1)$；最后使 $k=3$，计算出 $x(3)h(0)$。把这 4 个乘积加起来就得到 $y(3)$。这 4 次乘法和累加操作分别对应于图中从左向右的 4 条虚线和 4 个箭头。

如果再想计算 $y(5)$，就只要把图 5-6 中的 $h(n-k)$ 右移两个样点时间，然后用同样的乘累加方法计算出 $y(5)$，这时的累加项数增加到了 6 项。图 5-6 中的双向箭头表示只要把 $h(n-k)$ 左右移动，就可以计算出所需的 $y(n)$。

在图 5-6 的具体情况下，$x(k)$ 只有最前面的 3 个样点等于 1，其他样点都是零；$h(n-k)$ 也同样只有最前面的 3 个样点等于 1。由这两个序列的卷积产生的系统输出示于图 5-6 的右边。

图 5-6 中的结构是按照式(5-12)画出的，我们也可以由式(5-13)画出类似的卷积结构。这时，输入序列与冲击响应要互换位置，即输入序列变为 $x(n-k)$，而冲击响应变为 $h(k)$。但计算结果是完全一样的。

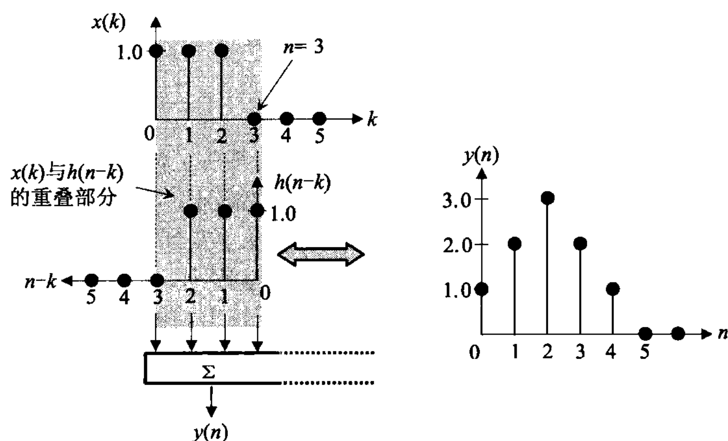


图 5-6　本意的卷积计算方式以及卷积计算的输出样点

5.2.6　卷积小结

卷积是一种计算离散系统输出序列的时域方法，一般用符号"⊗"或"＊"表示。在把输入序列施加于离散系统之后，输入序列中的每一个样点都会通过系统的冲击响应而产生一个输出序列。将所有这些输出序列按时间对齐并叠加之后，就得到系统的输出序列。在这个叠加过程中，输入样点与系统冲击响应样点是反向行进的(相对于自己横坐标的正方向)，因而就构成了卷积的计算形式。在本书的后面将经常用到式(5-12)和式(5-13)这两个卷积计算公式。

5.3　差分方程与传递函数

上面的卷积计算方法是依靠系统的单位冲击响应完成的。如果是 FIR(有限冲击响应)系统，单位冲击响应一般比较短，用卷积来计算系统输出是可以的。但 IIR(无限冲击响应)系统有无限长的单位冲击响应，卷积的计算方法就不太可行。为此，我们必须使用一种能够包含反馈的分析与计算方法，这就是差分方程和传递函数的方法。

5.3.1　差分方程

类似于连续时域中的情况，一个离散系统的当前输出样点可以表示为当前和过去的输入样点和过去的输出样点之线性和，这可以写为：

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_kx(n-k)-a_1y(n-1)-\cdots-a_my(n-m) \tag{5-14}$$

式(5-14)就是离散系统的差分方程表达式。其中，$y(n)$为离散系统的当前输出样点，$x(n)$为离散系统的当前输入样点，$x(n-1)$到 $x(n-k)$为系统过去的输入样点，

$y(n-1)$到 $y(n-m)$为系统过去的输出样点。式(5-14)右边的 y 项的存在表示系统包含了反馈的功能，因而适用于 IIR 滤波器的分析和计算。

5.3.2　从差分方程导出传递函数

我们可以将式(5-14)看成是在计算输出序列中的某一个输出样点 $y(n)$。所以，式(5-14)中的 n 可以看作一个暂时固定的常量。在这种情况下，等式两边的每一项都被看成一个样点。但是，当我们把式(5-14)中的 n 看作从 0 变到∞的时候，式(5-14)中的每一项就变成了一个离散序列。比如，$x(n)$是一个离散序列，$y(n-1)$也是一个离散序列，等等。这样，我们就可以对式(5-14)中的每一项计算出它的 z 变换。

在对式(5-14)两边取 z 变换之后，可以得到：

$$Y(z)=b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)+\cdots+b_kz^{-k}X(z)-a_1z^{-1}Y(z)-\cdots-a_mz^{-m}Y(z) \tag{5-15}$$

式(5-15)中，我们用 $X(z)$表示 $x(n)$的 z 变换，用 $Y(z)$表示 $y(n)$的 z 变换。对上式中的其他各项，可以利用 4.5 节中讲到的延迟操作来解释。比如，式(5-14)中的 $x(n-1)$是 $x(n)$延迟一个采样周期之后的序列，所以，$x(n-1)$的 z 变换应该是 $x(n)$的 z 变换乘以 z^{-1}，这就是式(5-15)中的 $z^{-1}X(z)$。再比如，式(5-14)中的 $y(n-m)$的 z 变换是 $z^{-m}Y(z)$，这就是式(5-15)中的最后一项。对式(5-14)中的其他离散序列，都可以在式(5-15)中找到相应的 z 变换。

从上面的 z 变换还可以看出，式(5-14)中的 $x(n)$、$x(n-1)$、…、$x(n-k)$属于同一个信号，但有不同的延迟；$y(n)$、$y(n-1)$、…、$y(n-m)$也属于同一个信号，也有不同的延迟。

把式(5-15)右边的 Y 项移到等式左边，再经过合并同类项和其他一些处理后，式(5-15)可以改写为：

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_kz^{-k}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}} \tag{5-16}$$

类似于连续时域中传递函数的定义，离散时域中的传递函数也被定义为系统的输出序列的 z 变换 $Y(z)$与输入序列的 z 变换 $X(z)$之比，并用 $H(z)$表示。这样，式(5-16)变为：

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_kz^{-k}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}} \tag{5-17}$$

式(5-17)就是离散时域系统的传递函数 $H(z)$的一般表达式，它的分子和分母中的系数都是实数。分母中的 m 为分母多项式的次数，指出了分母多项式的根的个数，所以也称为传递函数的阶数。

5.3.3　由系统冲击响应计算传递函数

对于离散系统的传递函数，我们还有另一个等价的定义。在图 5-3 中，我们用单位脉冲序列 $\delta(t)$作为输入序列，并得到了离散系统的输出序列，即单位冲击响应 $h(n)$。

我们先根据 z 变换的定义，计算出图 5-3 中离散系统输入序列与输出序列的 z 变换。作为输入序列的单位脉冲序列 $\delta(t)$ 的 z 变换已经在例 4-1 中计算为 1。所以，根据上一节的离散系统传递函数的定义，系统的传递函数就等于此时输出响应 $h(n)$ 的 z 变换。所以，我们就有了与式(5-17)等价的另一种传递函数表达式：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n} \tag{5-18}$$

在比较式(5-18)和式(5-17)之后，可以发现两者的不同点仍然是本节开始时指出的 FIR 与 IIR 的不同点。在实际应用中，IIR 系统的传递函数一般表示为式(5-17)；而 FIR 系统的传递函数一般表示为式(5-18)。

5.3.4 从传递函数导出差分方程

上面 5.3.2 节的分析是从系统的差分方程导出系统的传递函数。我们也可以从系统的传递函数导出它的差分方程。用一个例子来说明这个导出过程。

比如，一个离散系统的传递函数为：

$$H(z)=\frac{1.0+0.5z^{-1}}{1.0-1.8z^{-1}+0.9z^{-2}} \tag{5-19}$$

把上式左边的 $H(z)$ 用 $Y(z)/X(z)$ 代替，再去除两边的分母之后，式(5-19)变为：

$$Y(z)-1.8z^{-1}Y(z)+0.9z^{-2}Y(z)=X(z)+0.5z^{-1}X(z) \tag{5-20}$$

从式(5-20)可以容易地写出离散系统的差分方程：

$$y(n)-1.8y(n-1)+0.9y(n-2)=x(n)+0.5x(n-1) \tag{5-21}$$

或更好地表达为：

$$y(n)=x(n)+0.5x(n-1)+1.8y(n-1)-0.9y(n-2)$$

上式就是由式(5-19)的系统传递函数导出的系统差分方程，其形式与式(5-14)相似。由此看来，传递函数和差分方程是离散系统的两种等价的描述方法。一般来说，卷积和差分方程属于时域分析法，它们由输入序列计算出输出序列；而传递函数属于频域分析法，用来分析离散系统的频率响应。

5.4 频率响应

频率响应是一种稳态特性，它的意思是：用一个正弦信号激励一个离散线性系统时，系统的输出是一个同频率的正弦信号，但振幅和相位发生了变化。而且，振幅和相位的变化量是随输入正弦信号的频率的变化而变化的。这种输出振幅和相位对于输入信号频率的依从关系，就叫做离散时域系统的*频率响应*。

根据上面的叙述，我们可以这样来计算离散时域系统的频率响应：用一个离散复指数信号作为系统的输入，然后计算出离散系统的输出序列，并从中提取幅度与相位，以此确定系统的频率响应。使用复指数信号的好处是它的单一频率性。

这个复指数信号可以写为：

$$x(n)=e^{jn\omega T} \tag{5-22}$$

其中，ω 为复指数信号的角频率，T 为采样周期，复指数信号的幅度为1，初相为零。

我们用式(5-13)的卷积公式来计算系统的输出序列：

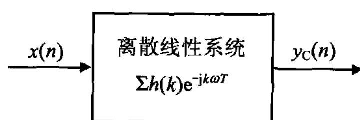
$$y_C(n)=\sum_{k=0}^{n} x(n-k)h(k)=\sum_{k=0}^{n} e^{j(n-k)\omega T}h(k) \tag{5-23}$$

上式右边的指数项中有一个常数项 $\exp(jn\omega T)$，也就是 $x(n)$，可以提到连加号之前。这样，上式变为：

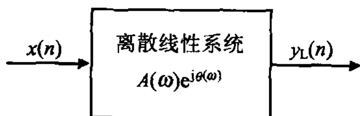
$$y_C(n)=e^{jn\omega T}\sum_{k=0}^{n} h(k)e^{-jk\omega T} \tag{5-24}$$

等式(5-24)可以表示为图5-7a中的关系。在式(5-24)中，连加运算的结果由$(n+1)$项相加而成。由于频率响应是稳态特性，所以我们需要知道，n 应该选择多大，才能保证系统已经进入稳态。FIR系统和IIR系统有不同的规定。如果是FIR系统，那么当 n 等于系统冲击响应长度的时候，系统就一定进入稳态。如果是IIR系统，那么，n 的选择取决于系统冲击响应的收敛速度。总的原则是，n 的选择应该使系统冲击响应最前面的 n 个样点包含了冲击响应总能量的绝大部分。

注释：本章后面的例5-5和例5-6中分别对FIR系统和IIR系统何时达到稳态做了解释。



(a) 由卷积导出的系统响应



(b) 由线性系统导出的系统响应

图5-7　离散线性系统对复指数信号的两种响应

现在换一个角度来观察离散线性系统的输出响应。这就是在本节开始时对频率响应所做的定义：在把一个正弦信号输入到一个离散线性系统之后，系统的输出是同频率的正弦波，所不同的只是幅度与相位。所以，当我们把式(5-22)中那个复指数信号输入到同一个离散线性系统时，这个离散线性系统的输出又可写为：

$$y_L(n)=e^{jn\omega T}A(\omega)e^{j\theta(\omega)} \tag{5-25}$$

其中，$A(\omega)$为输出信号的幅度，$\theta(\omega)$为输出信号的相移，$A(\omega)$和 $\theta(\omega)$都随频率而变。我们把式(5-25)画在图5-7b中。

显然，图5-7中的两个输出序列 $y_C(n)$和 $y_L(n)$一定相等。所以，式(5-25)的右边也一定等于式(5-24)的右边。这就是：

$$e^{jn\omega T}A(\omega)e^{j\theta(\omega)}=e^{jn\omega T}\sum_{k=0}^{n} h(k)e^{-jk\omega T} \tag{5-26}$$

上式两边的公因子 $e^{jn\omega T}$可以互相抵消。因此，式(5-26)变为：

$$A(\omega)e^{j\theta(\omega)}=\sum_{k=0}^{n} h(k)e^{-jk\omega T} \tag{5-27}$$

由于式(5-27)的左边就是系统的频率响应，所以，等式的右边也一定是我们所要的离散系统的频率响应。而且，可以把式(5-27)右边的复指数 $\exp(-j\omega T)$看作 z^{-1} 在

单位圆上的求值。这样，式(5-27)右边的这个频率响应表达式可以改写为：

$$式(5\text{-}27)的右边=\sum_{k=0}^{n}h(k)z^{-k}\Big|_{z=e^{j\omega T}} \tag{5-28}$$

当上式中的 n 充分大而使系统进入稳态之后，就可以由式(5-18)判定，上式右边的连加运算就是离散系统的传递函数 $H(z)$。这样就得到下面的结论：离散系统的频率响应等于它的传递函数在单位圆上的求值，并可以写为：

$$离散系统的频率响应=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}=H(e^{j\omega T}) \tag{5-29}$$

这就是离散系统频率响应的一般表达式。

既然说到了频率响应，我们有必要对 DSP 中常用的 3 个频率做一个说明，这 3 个频率是：实际频率 ω、归一化频率 ωT、单位圆上的频率点 $\exp(j\omega T)$。其中，归一化频率 ωT 又可写为 Ω；因此，单位圆上的频率点 $\exp(j\omega T)$ 也可写为 $\exp(j\Omega)$。当实际频率 ω 从 0 变到 ω_S 时，归一化频率 Ω 从 0 变到 2π，而单位圆上的频率点 $\exp(j\Omega)$ 从 $z=1$ 开始沿正方向走过整整一周。所以，这 3 个频率是一一对应的，也是可以互相转换的。式(5-29)中的 ωT 是一个归一化频率。

最后要说的是，离散系统的频率响应一般都是复数，所以，可以表示为模和幅角的形式：

$$H(e^{j\omega T})=|H(e^{j\omega T})|\angle H(e^{j\omega T}) \tag{5-30}$$

其中，$|H(e^{j\omega T})|$ 为频率响应中的幅频响应，$\angle H(e^{j\omega T})$ 为频率响应中的相频响应。

我们用下面两个例子来说明离散系统的频率响应是如何计算的。在第 6 章中将有更多的例子。

例 5-1 假设一个离散系统的差分方程为：

$$y(n)=x(n)+x(n-1) \tag{5-31}$$

要求找出该离散系统的频率响应。

首先对差分方程(5-31)两边取 z 变换，并求出系统的传递函数：

$$H(z)=1+z^{-1} \tag{5-32}$$

由上式可知，系统有一个零点在 $z=-1$。

现在对 $H(z)$ 在单位圆上求值，即用 $\exp(j\omega T)$ 代替式(5-32)中的 z。这样，就得到系统的频率响应：

$$H(e^{j\omega T})=1+e^{-j\omega T}=e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}) \tag{5-33}$$

利用欧拉恒等变换，上式可改写为：

$$H(e^{j\omega T})=2e^{-j\omega T/2}\cos(\omega T/2) \tag{5-34}$$

用 Ω 代替 ωT，使上式更为简洁：

$$H(e^{j\Omega})=2e^{-j\Omega/2}\cos(\Omega/2) \tag{5-35}$$

由式(5-35)可知，系统的幅频特性为 $2\cos(\Omega/2)$，而相频特性为 $-\Omega/2$。从幅频特性可知，当输入信号的归一化频率 Ω 为零时，系统的输出增益为 2；当输入信号的归一化频率 $\Omega=\pi$ 时，输出增益为 0。

这个系统的相频特性是线性的。当输入信号的归一化频率 Ω 接近零时，输出相移也接近零；当输入信号的归一化频率 $\Omega=\pi$ 时，输出相移为 $-\pi/2$。

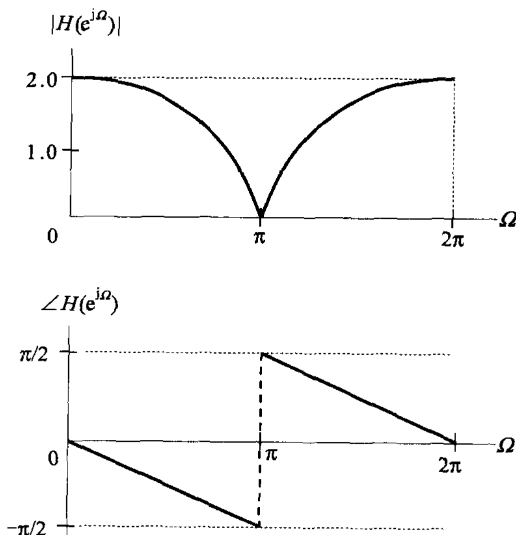


图 5-8　一个离散系统的幅频与相频特性

我们把该离散系统的幅频与相频特性画在图 5-8 中。从图中可以看出离散系统频率响应的一般特点：幅频特性是关于 $\Omega=\pi$ 偶对称的；相频特性是关于 $\Omega=\pi$ 奇对称的。相频特性在 $\Omega=\pi$ 处有 180°的相位突变，是因为系统在 $z=-1$ 有一个零点。当频率越过这个零点的时候，就引起 180°的相位突变。我们将在 5.6 节中讨论如何从零极点来确定系统的频率响应。

例 5-2　单位延迟 z^{-1} 在离散系统中是最常见的，而单位延迟本身也可以看作一个离散系统。我们来确定由一个单位延迟组成的离散系统的频率响应。

这个单位延迟的离散系统可以画成图 5-9 的样子。图 5-9 的意思是：把每个输入样点 $x(n)$ 延迟一个样点时间之后，再用作系统的输出样点 $y(n)$。所以，它的差分方程是：

$$y(n)=x(n-1) \tag{5-36}$$

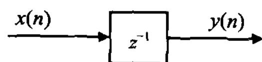


图 5-9　由一个单位延迟组成的离散系统

对式(5-36)的差分方程取 z 变换之后，就可以确定这个离散系统的传递函数：

$$H(z)=z^{-1}$$

上式与图 5-9 的意思是一致的，即图 5-9 中的 z^{-1} 就是系统的传递函数。

由传递函数可以得出系统的频率响应：

$$H(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega} \tag{5-37}$$

显然，这个单位延迟离散系统的幅度响应恒等于 1，而相位响应等于 $-\Omega$。当输入信号的频

率接近零时，单位延迟所引起的相移也接近零；当输入频率等于折叠频率时，单位延迟引起的相移为$-\pi$。这里的一个很有用的结论是，单位延迟只引起相位延迟，不影响幅频特性，而且，相位延迟的大小等于信号的归一化频率Ω。这个结论在后面会经常用到。

这个离散系统的频率响应画在图 5-10 中。这里要说明的是：图 5-10 与图 5-8 的画制方法有所不同。图 5-8 中的输入频率范围从 0 到 2π，而图 5-10 中的输入频率范围从$-\pi$到π。由于离散系统的频率特性是以Ω的2π为周期而重复的，所以两者是一样的。

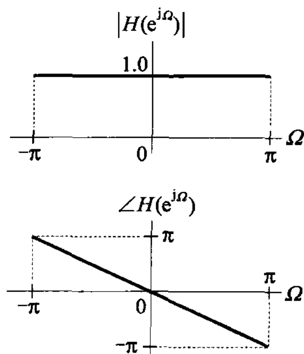


图 5-10 单位延迟离散系统的频率响应

5.5 零点与极点

在连续时域中，我们用零点与极点来描述系统的频率特性。离散时域中的情况是一样的。我们先给出离散系统零点与极点的定义。

离散系统的零点是指 z 平面上那些使传递函数 $H(z)$等于零的复数点，而极点是 z 平面上那些使传递函数 $H(z)$趋于无穷大的复数点。我们一般用 z_z来表示零点的位置，用 z_p表示极点的位置。比如，$z_z=1$、$z_p=0.5+j0.3$。

我们在前面说到，离散系统的传递函数 $H(z)$一般都可以表示为一个分式，其中的分子与分母都是以 z 为自变量的实系数多项式，比如像式(5-17)那样。在对分子与分母多项式进行因式分解之后，就可以确定传递函数的零点与极点。此外，实系数多项式的根，如果是复数，那么一定是以共轭复数对的形式出现的。所以，一个实系数多项式在分解因式时，它的每一个因式的次数都不会大于二次。

在有些情况下，传递函数的分子与分母已经被表示为因式的连乘，这样的零极点就非常容易确定。但也有一些传递函数的分子与分母的多项式是难以分解因式的，这样的传递函数的零极点就只能用数值分析的近似方法来确定，在实时处理中更是如此。

下面通过两个例子来说明如何找出传递函数的零极点。

例 5-3 一个离散系统的传递函数为：

$$H(z)=\frac{1+0.5z^{-1}}{1-1.8z^{-1}+0.82z^{-2}} \tag{5-38}$$

要求找出它的零极点。

为了方便零极点的查找，我们对上式右边的分子与分母同时乘以 z^2。这样就得到：

$$H(z)=\frac{z(z+0.5)}{z^2-1.8z+0.82}$$

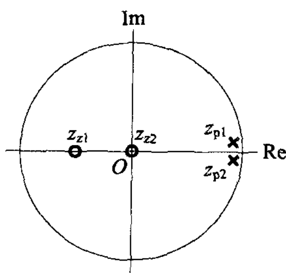


图 5-11　传递函数的 4 个零极点位置

从上式的分子来看，当 $z=-0.5$ 时，分子等于零。所以，该传递函数有一个零点在 $z_{z1}=-0.5$。分子中的另一个因子 z 对应于系统的另一个零点 $z_{z2}=0$。但这个零点只起到使相位提前的作用，对幅频响应没有任何影响。

传递函数的分母是一个二次三项式，它的两个根使分母等于零，因此是该离散系统的两个极点。我们可以容易地解出这两个根，它们是一对共轭复数：$z_{p1}=0.9+\mathrm{j}0.1$ 和 $z_{p2}=0.9-\mathrm{j}0.1$。

这 4 个零极点在 z 平面上的位置画在图 5-11 中，它们都在单位圆内。

例 5-4　一个离散系统的传递函数为：

$$H(z)=1+z^{-5} \tag{5-39}$$

要求找出这个离散系统的零极点。

我们把式(5-39)右边提出因子 z^{-5}，因此，式(5-39)变为：

$$H(z)=\frac{z^5+1}{z^5} \tag{5-40}$$

从上式可知，这个离散系统有 5 个零点和 5 个极点。由于 5 个极点都在原点的位置，所以只起到延迟相位的作用，不会影响系统的幅频特性。

由式(5-40)的分子可以得到求解传递函数 5 个零点的方程：

$$z^5=-1 \tag{5-41}$$

我们把上式右边的 -1 表示为复数极坐标的形式，即表示为一个模等于 1、幅角等于 π 的复指数。这样，方程(5-41)变为：

$$z^5=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} \tag{5-42}$$

由于复指数是以幅角的 2π 为周期的多值函数，所以，我们得到方程的解：

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi+2k\pi)/5},\quad k=0,1,2,3,4 \tag{5-43}$$

该传递函数的 5 个零点均匀地分布在单位圆上，其中有一个零点位于 $z=-1$。

我们对式(5-43)做一些解释。当 k 依次等于 0、1、2、3、4 时，得到传递函数的 5 个零点。其中，$k=0$ 和 $k=4$ 时得到的两个零点是 $z_{z0,z4}=0.809\pm\mathrm{j}0.588$；当 $k=1$ 和 $k=3$ 时得到的两个零点是 $z_{z1,z3}=-0.309\pm\mathrm{j}0.951$。这两对零点都是共轭的。而 $k=2$ 时得到的零点 $z_{z2}=-1$ 是一个实数，在负实轴上，所以是单独的。这 5 个零点在 z 平面上的位置画在图 5-12 中，而 5 个极点重合于原点。

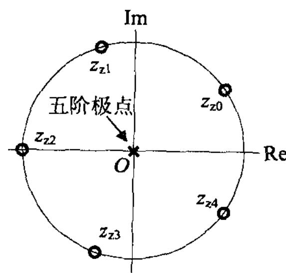


图 5-12　传递函数的 5 个零点都在单位圆上

5.6 频率响应的零极点图解法

我们在5.4节导出了离散系统频率响应的计算方法，即对系统传递函数在单位圆上求值。根据这个计算方法，我们可以利用零极点的位置实现快速的频率响应计算，这就是本节要讨论的“零极点图解法”。

离散系统的传递函数通常可以表示为式(5-17)那样的分式。分式中的分子、分母多项式的根就是传递函数的零点与极点。因此，可以对传递函数的分子与分母进行因式分解，使其变成下面的形式：

$$H(z)=b_0\frac{(1-z_{z1}z^{-1})(1-z_{z2}z^{-1})\cdots(1-z_{zk}z^{-1})}{(1-z_{p1}z^{-1})(1-z_{p2}z^{-1})\cdots(1-z_{pm}z^{-1})} \tag{5-44}$$

其中，z_{z1}、z_{z2}、…、z_{zk}为系统的零点，z_{p1}、z_{p2}、…、z_{pm}为系统的极点，b_0为常数增益项。

为了便于推导，我们改写式(5-44)中的每个因式：对每个因式提出因子z^{-1}。比如，分子中的第一个因式$(1-z_{z1}z^{-1})$就变为$z^{-1}(z-z_{z1})$。

对式(5-44)中的每个因式都提出一个因子z^{-1}之后，总的分式就有一个z^{m-k}的因子。如果$m>k$，那么因子z^{m-k}起到使系统输出相位提前的作用；反之，使系统输出相位滞后。

这样演变之后，式(5-44)变为：

$$H(z)=b_0z^{m-k}\frac{(z-z_{z1})(z-z_{z2})\cdots(z-z_{zk})}{(z-z_{p1})(z-z_{p2})\cdots(z-z_{pm})} \tag{5-45}$$

现在，式(5-45)中的每个因式都是两个复数之差，也就是z平面上两个复数点之间的一条矢量。具体地说，分子中的每个因式对应于z平面上从一个复数零点z_{zi}指向另一个复数z的矢量；分母中的每个因式对应于z平面上从一个复数极点z_{pi}指向另一个复数z的矢量；而这另一个复数z的具体取值将在下面讨论。

因为离散系统的频率响应等于它的传递函数在单位圆上的求值[见式(5-29)]，所以，当我们在计算系统频率响应的时候，式(5-45)中的自变量z就被限制在了单位圆上。这样，我们就可以由式(5-45)写出离散系统的频率响应：

$$H(e^{j\Omega})=b_0e^{j(m-k)\Omega}\frac{(e^{j\Omega}-z_{z1})(e^{j\Omega}-z_{z2})\cdots(e^{j\Omega}-z_{zk})}{(e^{j\Omega}-z_{p1})(e^{j\Omega}-z_{p2})\cdots(e^{j\Omega}-z_{pm})} \tag{5-46}$$

其中，Ω为输入信号的归一化频率。

现在，我们把式(5-46)中的每个因式，也就是每一条矢量，表示为极坐标的形式。比如，把式(5-46)分子中的第一个因式$(e^{j\Omega}-z_{z1})$表示为$d_1\exp(j\theta_1)$；再比如，把分母中的最后一个分式$(e^{j\Omega}-z_{pm})$表示为$c_m\exp(j\varphi_m)$。其中，d_1和c_m为矢量的模，θ_1和φ_m为矢量的幅角。而且，d_1、c_m和θ_1、φ_m都是随$e^{j\Omega}$的变化而变化的，也就是随频率而变化的。上述分析对于式(5-46)中的其他因式都是一样的。

这样之后，式(5-46)可以改写为：

$$H(e^{j\Omega})=b_0e^{j(m-k)\Omega}\frac{d_1e^{j\theta_1}\times d_2e^{j\theta_2}\times\cdots\times d_ke^{j\theta_k}}{c_1e^{j\varphi_1}\times c_2e^{j\varphi_2}\times\cdots\times c_me^{j\varphi_m}}$$

$$=b_0 e^{j(m-k)\Omega}\frac{(d_1 d_2 \cdots d_k)e^{j(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)}}{(c_1 c_2 \cdots c_m)e^{j(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)}} \tag{5-47}$$

由式(5-47)可以得到离散系统的幅频响应和相频响应。其中的幅频响应为：

$$|H(e^{j\Omega})|=\frac{b_0 d_1 d_2 \cdots d_k}{c_1 c_2 \cdots c_m} \tag{5-48}$$

其中，b_0为式(5-44)中的系统增益常数。

离散系统的相频响应为：

$$\angle H(e^{j\Omega})=(m-k)\Omega+(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)-(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m) \tag{5-49}$$

其中，$(m-k)\Omega$是由式(5-45)中的纯延迟z^{m-k}产生的相移，而且是相频响应中的线性相移部分。

现在对上面的分析做一个归纳：当输入信号频率从零逐渐增加到折叠频率时，就相当于一个复数点从$z=1$走过单位圆的上半个圆。与此同时，从所有零极点指向这个移动的复数点的矢量就可以用来计算离散系统的频率响应。频率响应中的幅频响应可以用式(5-48)来计算，它等于所有零点矢量长度(包括b_0)之积与所有极点矢量长度之积的比值；而相频响应可以用式(5-49)来计算，它等于所有零点矢量幅角[包括$(m-k)\Omega$]之和与所有极点矢量幅角之和的差值。

上面的分析似乎有些复杂，但具体使用时却很方便。我们用下面的两个例子来说明零极点图解法的计算过程。为了简化分析，我们先略去每个因式前面的z^{-1}或z的影响，即略去式(5-49)中的$(m-k)\Omega$。在分析完成后，再把这部分相移加上去。

例 5-5 一个离散系统的传递函数为：

$$H(z)=1-z^{-1} \tag{5-50}$$

要求用零极点图解法来分析这个简单离散系统的频率响应。

上式可以改写为便于分析的形式：

$$H(z)=\frac{z-1}{z} \tag{5-51}$$

由上式可知，传递函数有一个零点$z_z=1$和一个极点$z_p=0$，如图5-13所示。但极点$z_p=0$只起到相位延迟的作用，对幅频响应没有影响。

因此，分析这个离散系统的幅频响应就是分析这个零点对输出幅度的影响。首先，我们根据图解法的式(5-48)来观察图5-13。可以粗略地看出：信号频率越高，位于单位圆上的频率点离开系统零点$z_z=1$就越远，对应的矢量就越长，增益就越大。所以，这个离散系统具有消除直流分量和衰减低频分量的作用，即具有高通的特性。

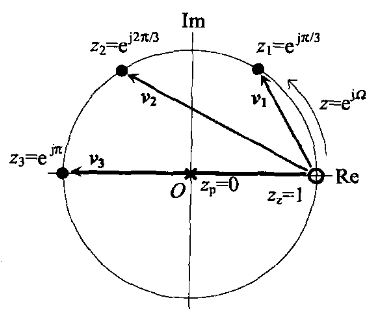


图5-13 位于实轴上的零点$z_z=1$对频率响应的影响

我们来具体计算不同频率下的系统频率响应，先从零频开始。当输入信号为直流时，信号的归一化频

率 Ω 为零。这个频率所对应的 z 平面上的位置是：

$$z=e^{j\Omega}|_{\Omega=0}=e^{j0}=1$$

所以，直流输入信号在 z 平面上的位置是与零点 z_z 重合的；因此，矢量 $z-z_z$ 的长度等于零，输出幅度就等于零。当幅度等于零的时候，幅角也就没有意义了。

当信号频率增加到采样频率的 1/6(即折叠频率的 1/3)时，z 就走到图 5-13 中 z_1 的位置。这时，归一化频率 $\Omega=\pi/3$，矢量 $z_1-z_z=e^{j\pi/3}-1$，就是图 5-13 中的矢量 v_1。由几何知识可知，这条矢量的长度等于 1，幅角等于 $2\pi/3=120°$。所以，零点 z_z 使频率等于 1/6 采样频率的信号的幅度维持不变，而相位提前了 120°。在考虑到式(5-51)中的因式 $1/z$ 时，就要加上 60°的相位延迟，所以总的相位提前量为 120°－60°＝60°。

我们继续增加信号频率，比如，增加到采样频率的 1/3，即折叠频率的 2/3。这时的 z 就走到图 5-13 中 z_2 的位置。从系统零点 z_z 指向 z_2 的矢量为图 5-13 中的 v_2。这时的矢量长度等于 1.732，幅角等于 150°。所以，系统零点对于频率为 1/3 采样频率的信号的影响是，使它的幅度增大到原来的 1.732 倍，相位提前了 150°－120°＝30°。

如果再把信号频率增加到折叠频率，就走到图 5-13 中 z_3 的位置。这时的矢量 v_3 的长度等于 2，幅角等于 180°。所以，系统零点对于频率等于折叠频率的信号的影响是，幅度增加一倍，相位的改变量等于 180°－180°＝0°，即信号的相位没有变化。

当我们知道了这个离散系统在 4 个频率点上的响应时，也就大体知道了在全部频率范围内的系统响应。

现在用图 5-14 从时域上来验证上面对这个零点的频率响应的分析。由于传递函数为 $H(z)=1-z^{-1}$，因此，差分方程是 $y(n)=x(n)-x(n-1)$。图 5-14 中使用的信号频率为采样频率的 1/3，对应于图 5-13 中的 z_2 和 v_2。

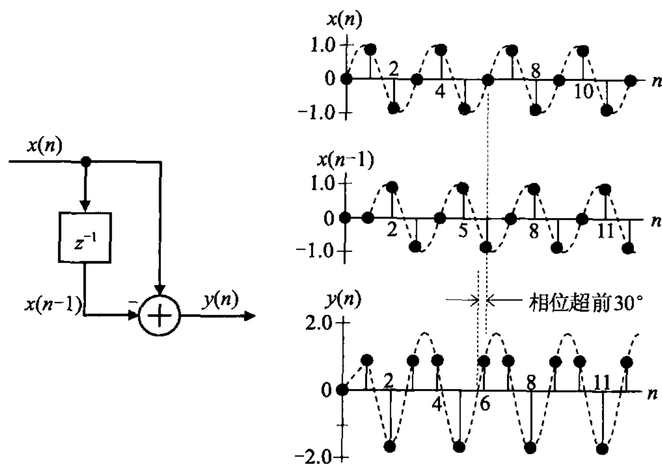


图 5-14 一个位于实轴上的零点对频率响应的影响

图 5-14 的左边是根据差分方程画出的实现框图，右边是 3 个离散序列。输入信号 $x(n)$ 为振幅等于 1、初相等于 0 的正弦序列。由于信号频率为采样频率的 1/3，所以在每个周期内有 3 个样点。$x(n-1)$ 的样点序列与 $x(n)$ 是一样的，只是延迟了一个采样周期。$y(n)$ 是按照差分方程 $y(n)=x(n)-x(n-1)$ 计算的。从图 5-14 可以看出，输出序列 $y(n)$ 的幅度大约是输入序列 $x(n)$

幅度的1.732倍，相位超前了30°。这个结果与前面的图解法分析结果是相符的。

另外，从图5-14中$y(n)$的样点可以看出，在第一个样点时刻，系统处于瞬态过程。从第二个样点开始，系统即进入稳态。这是FIR系统的一个特点：当运行时间等于系统冲击响应长度的时候，系统即进入稳态。

例 5-6　一个离散系统的传递函数为：

$$H(z)=\frac{1}{1+0.5z^{-1}} \tag{5-52}$$

要求用零极点图来分析该离散系统的频率响应。

对上式的分子与分母同时乘以z，因此上式变为：

$$H(z)=\frac{z}{z+0.5} \tag{5-53}$$

这个离散系统有一个极点位于$z_p=-0.5$，在负实轴上，另有一个零点位于$z_z=0$，如图5-15所示。我们首先分析分母中极点z_p的频率响应，然后加上零点的影响。

我们先粗略地看一下这个离散系统的频率响应。由于系统极点在单位圆内的左边，比较靠近折叠频率的位置，所以，当信号频率比较高时，相应的矢量就比较短，增益就比较大。因此，这个离散系统有高通的特性。

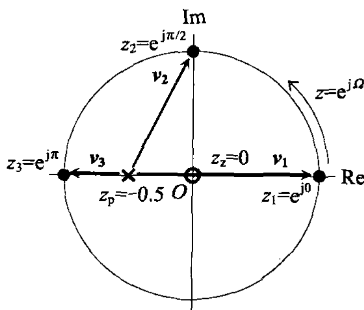


图5-15　一个位于实轴上的极点$z_p=-0.5$对频率响应的贡献

我们使用例5-5中相同的步骤，但只选择3个信号频率点：零频、折叠频率的一半、折叠频率。它们分别对应图5-15中的z_1、z_2和z_3这3个复数点，它们的归一化频率Ω分别为0、$\pi/2$和π。

首先，当输入信号为直流时，信号的归一化频率Ω为零，这就是图中的$z_1=e^{j0}=1$。从极点z_p指向z_1的矢量为v_1，矢量的长度等于1.5，幅角等于零。所以，这个极点对直流输入信号的影响是使信号的幅度缩小到原来的1/1.5。因为直流信号没有相位，也就无所谓相位变化。

当信号频率增加到折叠频率的1/2（即采样频率的1/4）时，z走到图5-15中z_2的位置，这时的矢量为v_2。经过简单计算可知，这个矢量的长度约等于1.12，幅角约等于63°。所以，系统极点对频率等于折叠频率一半的信号的影响是，使幅度减少到原来的1/1.12，相位延迟63°。但考虑到式(5-53)传递函数分子上的因子z，相位延迟要加上90°的相位提前，所以信号总的相位提前量为90°−63°=27°。

最后把信号频率增加到折叠频率，即采样频率的一半，z就走到图5-15中z_3的位置。这时的矢量变为图5-15中的v_3。显然，矢量v_3的长度等于0.5，幅角等于180°。所以，这个极点对于频率等于折叠频率的信号的影响是，使幅度增加一倍，相位延迟了180°。但由于式(5-53)分子中因子z的作用，输出信号总的相位延迟为180°−180°=0°。

与例5-5中的图5-14一样，我们用图5-16中的计算框图和样点序列来验证其中一个频率点的频率响应。这个信号频率点为采样频率的1/4，即图5-15中z_2的情况。信号在每个周期内应该有4个样点。系统的差分方程可以根据式(5-52)写为：

$$y(n)=x(n)-0.5y(n-1) \tag{5-54}$$

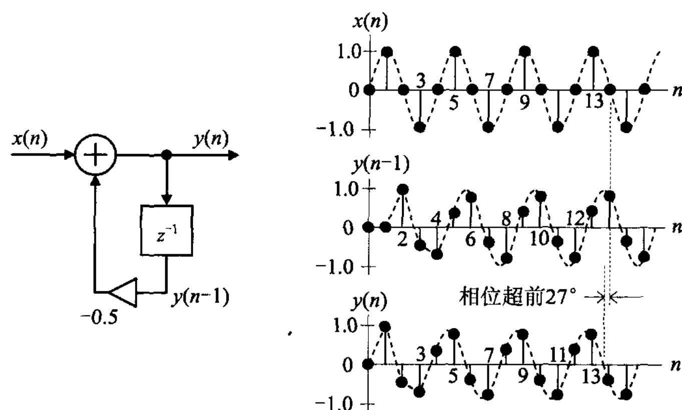


图 5-16 一个位于负实轴上的极点对输出信号的影响

带有极点的离散系统一般稍复杂，因为极点表示系统有反馈。为此，我们先用表 5-1 计算出系统中各个信号的具体样点数值，然后再画出图 5-16 右边的信号序列。在表 5-1 的计算中，我们假定输入信号为正弦序列，振幅为 1，初相为 0。

表 5-1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x(n)$	0.0	1.0	0.0	−1.0	0.0	1.0	0.0	−1.0	0.0	1.0	0.0	−1.0
$y(n-1)$	0.0	0.0	1.0	−0.5	−0.75	0.38	0.81	−0.41	−0.80	0.40	0.80	−0.40
$y(n)$	0.0	1.0	−0.5	−0.75	0.375	0.81	−0.41	−0.80	0.40	0.80	−0.4	−0.80

从图 5-16 的右边可以看出，$y(n-1)$比 $y(n)$延迟一个采样周期。而且，从图 5-16 中的样点波形(用虚线表示)可以估算出 $y(n)$的振幅要比 $x(n)$小一些，这就是前面说到的 0.89 倍，相位大约超前 27°左右。而且很重要的一点是，上面的幅度与相位数据应当在第 7 个样点之后进行估算。因为在第 7 个样点之后，系统已经基本上进入稳态。

但是，为什么说在第 7 个样点之后系统就进入稳态？我们是在计算表 5-1 中最前面的 12 个样点时发现的。因为从第 7 个样点开始，各个信号已进入循环。

表 5-2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x(n)$	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h(n)$	1.0	−0.5	0.25	−0.125	0.0625	−0.0313	0.0156	−0.0078	0.0039	−0.0020	0.0010	−0.0005

对此，我们可以从另一个角度来分析。对于前面的式(5-24)，我们曾经说过：对于 IIR 离散系统，n 的选择应该使系统冲击响应 $h(k)$的绝大部分能量集中在前 n 个样点中。为了验证这一点，我们利用式(5-54)计算出了系统的单位冲击响应 $h(n)$，并把结果列在表 5-2 中，也示于图 5-17 中。由图 5-17 的情况来看，从第 7 个样点起，$h(n)$的幅度确实小到可以忽略不计。而从表 5-2 来计算，$h(n)$前 7 个样点的能量之和已经占到 $h(n)$总能量的 99.99%。所以，系统从第 7 个样点之后进入稳态的说法应该是正确的。

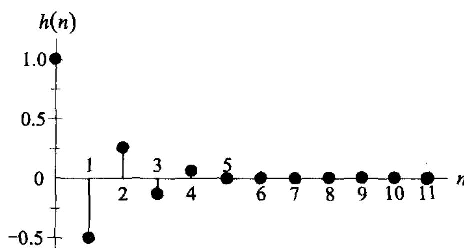


图 5-17　一个 IIR 系统的单位冲击响应

5.7　离散时域系统的稳定性

离散时域系统稳定性的定义是：如果一个有界的输入序列产生一个有界的输出序列，那么，这个离散时域系统是稳定的。

我们可以用公式来描述这个稳定性定义。这就是，如果一个离散系统是稳定的，那么对于离散系统的输入序列：

$$|x(n)| \leqslant M_1 \tag{5-55}$$

就一定有离散系统的输出序列：

$$|y(n)| \leqslant M_2 \tag{5-56}$$

其中，M_1 和 M_2 是两个有限的数。

根据这个稳定性定义，可以得出时域和频域中的两个离散系统稳定性判据。

5.7.1　稳定性时域判据

在时域中，我们利用单位冲击响应 $h(n)$ 来判断：如果一个离散系统的单位冲击响应的绝对累加和是有界的，那么这个离散系统是稳定的。这可以用下面的公式来表达。

对于一个离散系统，如果

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{5-57}$$

那么这个离散系统是稳定的。

我们用卷积来证明。首先，对卷积公式(5-13)的两边取绝对值：

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=0}^{n} x(n-k)h(k) \right| \tag{5-58}$$

在式(5-58)中，我们假设系统冲击响应的前 n 个样点包含了冲击响应的绝大部分能量。

因为两个数的绝对值之和不小于两个数之和的绝对值，所以，式(5-58)可以改写为：

$$|y(n)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|x(n-k)h(k)|=\sum_{k=0}^{n}|x(n-k)||h(k)| \tag{5-59}$$

由式(5-55)可知，$|x(n)|$是有界的，并且假设不大于M_1。所以，式(5-59)可以表示为：

$$|y(n)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}M_1|h(k)|=M_1\sum_{k=0}^{n}|h(k)| \tag{5-60}$$

根据式(5-57)的条件，式(5-60)最右边的连加运算之和也是有界的，并假设不超过M_2。而且，由于前面提到系统冲击响应的前n个样点包含了冲击响应的绝大部分能量，所以，n完全可以替换成∞。因此，式(5-60)可以改写为：

$$|y(n)|\leqslant M_1\sum_{k=0}^{\infty}|h(k)|\leqslant M_1M_2 \tag{5-61}$$

这样，我们就证明了离散系统稳定性的时域判据：只要系统冲击响应的绝对累加和是有界的，这个离散系统就一定是稳定的。

例 5-7 作为离散系统稳定性时域判据的一个例子，我们来考察这样一个离散系统，它的冲击响应为单位指数序列：

$$h(n)=a^nu(n) \tag{5-62}$$

式中的$u(n)$只是为了保证当$n<0$时，$h(n)\equiv0$。这实际上是说，系统是因果性的。

如果希望这个离散系统是稳定的，就必须有

$$\sum_{k=0}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=0}^{\infty}|a^k|<\infty \tag{5.63}$$

式中的无穷级数的收敛条件是$|a|<1$，所以这个离散系统的稳定条件是$-1<a<1$。

5.7.2 稳定性频域判据

从频域上判断系统的稳定性，就是观察离散系统的极点位置。如果系统的极点都在单位圆内，那么这个离散系统是稳定的；如果有一个极点在单位圆上的$z=1$，而其他极点都在单位圆之内，那么这个离散系统是准稳定的；对于其他的极点位置情况，离散系统都是不稳定的。我们通过一个例子来说明极点位置对系统稳定性的影响。

例 5-8 假定一个离散系统有下面的传递函数：

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}+2z^{-2}} \tag{5-64}$$

要求判定这个离散系统的稳定性。

这是一个二阶系统，有两个极点。通过计算，可以确定出它的两个极点位于：

$$\begin{cases}z_{p1}=1+\mathrm{j}\\z_{p2}=1-\mathrm{j}\end{cases} \tag{5-65}$$

两个极点的位置见图 5-18a。这是一对共轭复数，它们的模大约等于 1.4142。由于两个极点都在单位圆之外，根据稳定性频域判据，这个系统是不稳定的。

我们来计算这个离散时域系统的单位冲击响应，以验证其不稳定性。由传递函数(5-64)可以画出离散系统的实现框图，如图5-18b所示。利用这个实现框图，我们计算出以单位脉冲序列为输入时的系统输出响应。输入序列 $x(n)$、输出序列 $y(n)$ 和系统中其他信号的计算结果列于表5-3中，同时把输入序列 $x(n)$ 与输出序列 $y(n)$ 画在图5-18c中。从图5-18可以看出，输入 $x(n)$ 是有界的（最大不超过1），而输出 $y(n)$ 随 n 的递增而在不断增大并趋于无穷大。因此，这个离散系统是不稳定的。这与上面利用极点位置的频域判定的结果是一致的。

表 5-3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x(n)$	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y(n-1)$	0.0	1.0	2.0	2.0	0.0	−4.0	−8.0	−8.0	0.0	16.0	32.0	32.0
$y(n-2)$	0.0	0.0	1.0	2.0	2.0	0.0	−4.0	−8.0	−8.0	−8.0	16.0	32.0
$y(n)$	1.0	2.0	2.0	0.0	−4.0	−8.0	−8.0	0.0	16.0	32.0	32.0	0.0

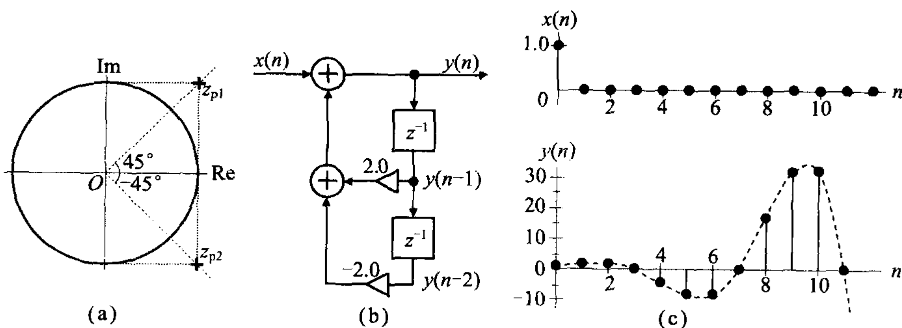


图5-18 一个二阶系统的极点分布、实现框图以及单位冲击响应

最后，我们对系统输出的振荡频率做一个简单讨论。当把图5-18a中的极点位置与图5-18c中的输出序列 $y(n)$ 进行比对的时候就会发现，振荡频率是与这一对共轭复数极点的位置一致的。在这个例子中，极点位置所对应的归一化频率是 $\pi/4$，所以，振荡频率应该是采样频率的1/8，或者说，振荡周期是采样周期的8倍。这就表现为图5-18c中的 $y(n)$ 是以8个样点为周期而振荡的。如果让图5-18a中的两个极点围绕原点旋转某个角度，那么振荡频率就会有同样的改变量。另一方面，如果把图中的两个极点 z_{p1} 和 z_{p2} 沿着虚线移到单位圆上，那么系统的输出序列不再是一个无限增长的振荡，而是一个等幅振荡。如果把这一对极点继续移到单位圆之内，就得到衰减的振荡，系统就变为稳定。

小结

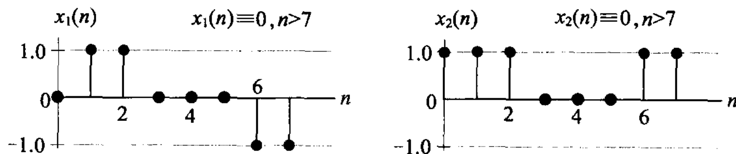
- ☐ 数字信号处理中涉及的离散时域系统应该是线性的、移不变的和因果性的。
- ☐ 分析离散时域系统，就是分析系统的输入与输出之间的关系，这包括时域的卷积分析方法和频域的传递函数分析方法。虽然差分方程可以与传递函数互相转

换，但通常被用于计算系统的时域输出。

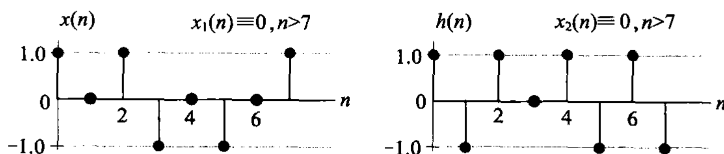
- □把一个正弦信号输入到一个离散线性系统之后，离散系统的输出是一个同频率的正弦信号，但振幅和相位发生了改变。这种随频率而变的振幅和相位的改变量就叫做离散系统的频率响应。
- □离散系统的零极点位置确定了系统的行为特性，而零极点图解法是判断离散系统频率响应的快捷方法。
- □系统的稳定性是指有界的输入产生有界的输出，可以通过系统的冲击响应或系统极点来判断系统的稳定性。
- □掌握了离散时域系统的这些分析方法之后，就可以对离散系统进行特性分析，并做出判断或改进。

习题

5.1 计算下列两个有限长离散序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的卷积。



5.2 一个离散时域系统的输入为 $x(n)$，系统冲击响应为 $h(n)$，试确定系统的输出序列 $y(n)$。



5.3 试确定下列差分方程所对应的系统传递函数和系统单位冲击响应。

(1) $y(n)+0.6y(n-1)=x(n)+2x(n-1)$

(2) $y(n)=x(n)+x(n-2)$

5.4 计算由下列差分方程所确定的离散系统的幅频与相频响应，并画出归一化频率的频响曲线。

(1) $y(n)=x(n)-x(n-2)$

(2) $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2)$

5.5 计算由下列差分方程所确定的离散系统在直流和折叠频率处的幅频响应。

(1) $y(n)=x(n)+0.6y(n-1)$

(2) $y(n)=x(n)+0.5x(n-1)+0.5y(n-1)$

5.6 试证明一个离散系统在 1/2 折叠频率处的频率响应等于 $H(\mathrm{j}1)$。

5.7 利用上面 5.6 题中的结论，计算由下列差分方程所确定的离散系统在 1/2 折叠频率处

的频率响应。

(1) $y(n)=x(n)+0.3y(n-1)-0.3y(n-2)$

(2) $y(n)=x(n)+3x(n-1)+0.1y(n-1)$

5.8　用零极点图解法计算与下列差分方程对应的离散系统在1/4折叠频率处的幅频响应。

(1) $y(n)=x(n)+2x(n-1)+0.5y(n-1)$

(2) $y(n)=x(n)+0.6y(n-1)-0.08y(n-2)$

5.9　假设系统冲击响应 $h(n)$ 的 z 变换为：

$$H(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}}$$

(1) 画出 $H(z)$ 的零极点图。

(2) 找出 $h(n)$ 的表达式。

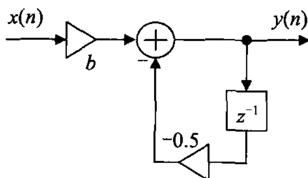
(3) 这个离散系统是否稳定？

5.10　一个离散时域系统的差分方程为：

$$y(n)=x(n)-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)$$

试确定差分方程中的参数 a_1 和 a_2，以使 $f=0$ 时的幅频响应等于1，$f=0.5f_S$ 时的幅频响应等于0.5，其中，f_S 为采样频率。

5.11　试确定下图中离散时域系统的频率响应，并确定系统出现幅频响应最大值时的归一化频率。当 b 为何值时该最大增益等于1？画出此时的幅度与相位响应。



5.12　一个离散时域系统的差分方程为：

$$y(n)=x(n)-0.6y(n-1)+0.16y(n-2)$$

假设采样频率为1000 Hz，试确定该系统在下面频率点上的幅频响应：

(1) $f=0$

(2) $f=250$ Hz

(3) $f=500$ Hz

5.13　确定参数 A 的范围，以使下列差分方程对应的离散系统是稳定的。

(1) $y(n)+Ay(n-1)=8x(n)$

(2) $y(n)-A^2y(n-2)=x(n-2)$

第 6 章 离散时域系统实例

本章要分析的几个离散时域系统是一些非常基本的数字滤波器。这些滤波器由于简单而被经常使用。我们将运用前几章学到的离散时域系统分析方法，对这些滤波器的特性进行描述。这不仅有助于掌握离散时域系统的基本分析方法，而且也有利于理解后面的数字滤波器和离散傅里叶变换的内容。

6.1 点阻滤波器

点阻滤波器的特性是滤波器在某一频率上的增益等于零，而在其他频率上的增益等于 1。所以，这种滤波器可以用来滤除某个特定频率处的噪声或不需要的成分。

一个二阶点阻滤波器的传递函数可以写为：

$$H(z)=\frac{1-2(\cos\theta)z^{-1}+z^{-2}}{1-2r(\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{6-1}$$

其中，r 与 $\cos\theta$ 确定了滤波器的零极点位置，这将在下面说明。

作为分析的第一步，我们先画出滤波器的零极点位置。为使叙述较为清晰，我们使用具体的参数，比如，$\theta=60°$ 和 $r=0.95$。此时式(6-1)变为：

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{1-0.95z^{-1}+0.9025z^{-2}} \tag{6-2}$$

传递函数(6-2)的两个零点为：

$$z_{z1,z2}=0.5\pm j0.866 \tag{6-3}$$

传递函数(6-2)的两个极点为：

$$z_{p1,p2}=0.475\pm j0.823 \tag{6-4}$$

式(6-3)和式(6-4)可以写成极坐标的形式：

$$\begin{cases} z_{z1,z2}=1.0\times e^{\pm j\pi/3} \\ z_{p1,p2}=0.95\times e^{\pm j\pi/3} \end{cases} \tag{6-5}$$

把零点和极点用极坐标式(6-5)表示之后，就可以很方便地画出零点、极点在 z 平面上的位置，如图 6-1 所示。两个零点和两个极点都有 $\pm60°$ 的幅角，这个 $60°$ 的角就是我们在前面对式(6-1)中 θ 设定的角度。其中的两个零点位于单位圆上，而两个极点分别位于两个零点所在的半径上，且极点与圆心的距离为 0.95。这个 0.95 的距离是前

面对式(6-1)中的 r 设定的长度。所以，点阻滤波器是通过 θ 和 r 来设置零极点位置的，并以此规定了滤波器的频率特性。由于它的两个极点都在单位圆内部，所以，这个点阻滤波器是稳定的。

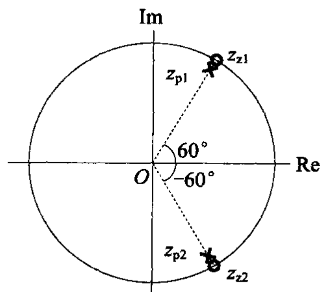


图 6-1　一个二阶点阻滤波器的零极点位置

下面计算这个点阻滤波器的幅频响应。计算幅频响应的方法是对式(6-2)在单位圆上求值，然后取其模。但首先要把式(6-2)表示为因式相乘的形式，如下所示：

$$H(z)=\frac{(1-z_{z1}z^{-1})(1-z_{z2}z^{-1})}{(1-z_{p1}z^{-1})(1-z_{p2}z^{-1})} \tag{6-6}$$

其中，z_{z1}、z_{z2}、z_{p1}、z_{p2} 是滤波器的两个零点和两个极点，并由式(6-5)确定。为了便于计算，我们对式(6-6)的分子与分母同时乘以 z^2。这样，式(6-6)变为：

$$H(z)=\frac{(z-z_{z1})(z-z_{z2})}{(z-z_{p1})(z-z_{p2})} \tag{6-7}$$

现在就可以对式(6-7)在单位圆上求值，并取其模，以此确定点阻滤波器的幅频响应：

$$|H(e^{j\omega T})|=\left|\frac{(e^{j\omega T}-z_{z1})(e^{j\omega T}-z_{z2})}{(e^{j\omega T}-z_{p1})(e^{j\omega T}-z_{p2})}\right| \tag{6-8}$$

我们把式(6-8)中的归一化频率 ωT 写为 Ω，因而使表达式更加简洁：

$$|H(e^{j\Omega})|=\left|\frac{(e^{j\Omega}-z_{z1})(e^{j\Omega}-z_{z2})}{(e^{j\Omega}-z_{p1})(e^{j\Omega}-z_{p2})}\right| \tag{6-9}$$

现在令 Ω 从 0 变化到 π，就可以计算出这个点阻滤波器的幅频响应。具体的计算是使用计算机完成的。我们在 Ω 从 0 到 π 的范围内均匀地选择了 34 个频率点，计算结果示于图 6-2 中。图 6-2 显示了滤波器的点阻特性。在 $\Omega=\pi/3$ 的频率点上，滤波器的增益为零。从图 6-1 中两个零点的位置也可以看出这个滤波器的点阻特性，因为当归一化频率 $\Omega=\theta=\pi/3$ 时，式(6-9)分子中的两条矢量中的一条矢量的长度等于零。由于单位圆上其他频率点到零点与极点的距离几乎相等，所以在低频和高频区的增益都接近于 1。而图 6-2 中的这个增益略大于 1，因为单位圆上的一个点到极点的距离要略微小于该点到零点的距离。

从图 6-2 可知，在 $\Omega=\pi/3$ 频率附近的增益和相位有很大的变化率。为了分析这一频率附近的情况，我们把图 6-1 中这一区域放大成图 6-3 的样子。图中的极点 z_{p1} 到单位圆的距离为 0.05。在零点 z_{z1} 两侧的单位圆上确定出两个频率点 f_1 和 f_2，使零点 z_{z1} 到这两个频率点的距离都等于 0.05。这样，就在图中构成了一个等腰直角三角形(由两条虚线与单位圆构成，并把单位圆的这一部分看作一条直线)。因此，从 f_1 或 f_2 到极点 z_{p1} 的距离都等于 0.0707，而 f_1 或 f_2 到零点 z_{z1}(即点阻滤波器的中心频率)的距离为 0.05。所以，点阻滤波器在频率等于 f_1 或 f_2 时的增益等于 0.05/0.0707=0.707，也就是−3 dB。因此，f_1 或 f_2 就是这个点阻滤波器的阻带的两个端点频率，或者说，这

个点阻滤波器的−3 dB带宽等于 $f_2-f_1=0.1$。

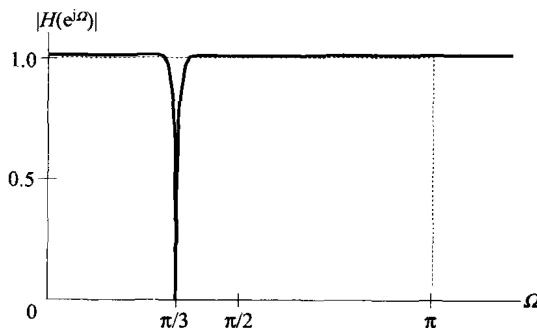


图 6-2 一个二阶点阻滤波器的频率响应

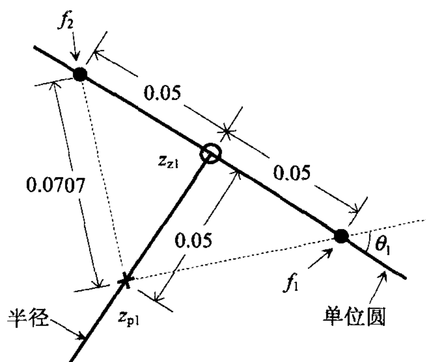


图 6-3 点阻滤波器一对零极点的邻域

显然,这个0.1的带宽是归一化的频率。那么,这个0.1的带宽究竟是多宽的频带呢?首先,我们把它与采样频率相比。因为归一化的采样频率等于 2π,所以,这个比值等于 $0.1/(2\pi)=0.05/\pi=0.0159$,即等于采样频率的0.0159。因此,如果采样频率等于8000 Hz,那么,这个点阻滤波器的带宽就等于127 Hz。从图6-3可以看出,这个带宽可以容易地通过极点的位置来调节:将极点沿着半径向单位圆移动,带宽就变窄,反之,带宽就变宽。

点阻滤波器在零点 z_{z1} 附近的相位变化,也可以用5.6节的零极点图解法进行估算。但因为这是一个点阻滤波器,所以,这一频率区内的信号成分已被大大衰减了,它们的相位也就不那么重要了。我们可以确定出在 f_1 处的相移为图6-3中的 θ_1,它等于 $-45°$,而 f_2 处的相移应该是 $+45°$。当从 f_1 沿着单位圆逐渐接近零点 z_{z1} 时,相移从 $-45°$ 逐渐变为 $-90°$;当越过零点 z_{z1} 之后,相移发生180°的突变而变为 $+90°$,然后逐渐减小,当到达 f_2 时,相移变为 $+45°$。

最后需要说明的是,在上面估算幅度和相移的时候,我们假设系统的另一对零极点(图6-1中的 z_{z2} 和 z_{p2})之间的距离很小,所以,它们对上面讨论的 z_{z1} 和 z_{p1} 频率区的影响是互相抵消的。

6.2 谐振器

谐振器的频率特性正好与点阻滤波器相反,它是指在某个频率上的增益达到最大值1,而在其他频率上的增益都远小于1。增益达到1的频率点就是谐振器的谐振频率点。一个二阶谐振器的传递函数可以表示为:

$$H(z)=\frac{b_0(1-z^{-2})}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{6-10}$$

这样一个谐振器有两个零点:

$$z_{z1,z2}=\pm 1 \tag{6-11}$$

谐振器的两个极点都应该在单位圆内，具体的极点位置由 a_1 和 a_2 确定。因为 a_1 和 a_2 都是实数，所以，两个极点必然为一对共轭复数：

$$z_{p1,p2}=\frac{1}{2}\left(-a_1\pm \mathrm{j}\sqrt{4a_2-a_1^2}\right) \tag{6-12}$$

利用式(6-11)和式(6-12)可以把式(6-10)中的分子与分母分别分解为两个因式的连乘：

$$H(z)=\frac{b_0(z-z_{z1})(z-z_{z2})}{(z-z_{p1})(z-z_{p2})} \tag{6-13}$$

在进一步分析谐振器特性的时候，最好使用具体的数据。假定谐振器的两个极点位于±60°的半径上，而且极点到原点的距离为0.9。我们来确定 a_1、a_2 和 b_0。

首先，可以容易地确定出 a_1 和 a_2。因为谐振器的两个极点位于±60°的半径上，而且极点到原点的距离为0.9，所以，这两个极点可以用极坐标形式写为：

$$z_{p1,p2}=0.9\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\pi/3} \tag{6-14}$$

上式可以容易地改写为直角坐标的形式：

$$z_{p1,p2}=0.45\pm \mathrm{j}0.779 \tag{6-15}$$

根据二次三项式根与系数的关系，或者把式(6-15)代入式(6-13)的分母中，就可以由 z_{p1} 和 z_{p2} 计算出式(6-10)分母中的 a_1 和 a_2：

$$\begin{cases} a_1=-0.9 \\ a_2=0.809 \end{cases} \tag{6-16}$$

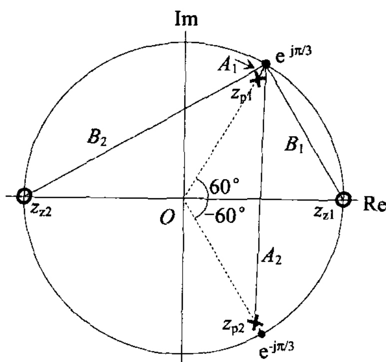


图6-4　谐振器的零极点分布

b_0 的作用是把谐振器在谐振频率点上的增益调节到1。为了计算 b_0，我们要借助谐振器的零极点图，如图6-4所示。因为极点非常靠近单位圆，所以可以认为归一化的谐振频率就在 $\pi/3$ 处(当然还有 $-\pi/3$)，这就是图中的频率点 $\exp(\mathrm{j}\pi/3)$。从 $\exp(\mathrm{j}\pi/3)$ 到两对零极点的距离在图6-4中分别表示为 B_1、B_2 和 A_1、A_2。由于线段 B_1、B_2 和实轴构成一个直角三角形，所以，B_1 和 B_2 的长度为：

$$\begin{cases} \overline{B_1}=2.0\times \sin(\pi/6)=1.0 \\ \overline{B_2}=2.0\times \cos(\pi/6)=1.732 \end{cases} \tag{6-17}$$

A_1 是从极点 z_{p1} 到 $\exp(\mathrm{j}\pi/3)$ 的距离，等于0.1。因为极点离单位圆比较近，所以可以认为 A_2 是从 $\exp(\mathrm{j}\pi/3)$ 到 $\exp(-\mathrm{j}\pi/3)$ 的距离，也就是等于 B_2 的长度。因此，可以确定 A_1 和 A_2 的长度为：

$$\begin{cases} \overline{A_1}=0.1 \\ \overline{A_2}=2.0\times \cos(\pi/6)=1.732 \end{cases} \tag{6-18}$$

这样，就可以根据式(5-48)和式(6-13)计算出谐振频率点上的增益：

$$|H(e^{j\pi/3})|=\frac{b_0|(e^{j\pi/3}-z_{z1})(e^{j\pi/3}-z_{z2})|}{|(e^{j\pi/3}-z_{p1})(e^{j\pi/3}-z_{p2})|}=\frac{b_0\overline{B_1}\overline{B_2}}{\overline{A_1}\overline{A_2}}=b_0\times 10 \tag{6-19}$$

要求在谐振频率点上的增益等于1，即：

$$|H(e^{j\pi/3})|=b_0\times 10=1$$

所以，b_0为：

$$b_0=0.1 \tag{6-20}$$

计算出了a_1、a_2和b_0之后，谐振器的传递函数(6-10)就可以改写为：

$$H(z)=\frac{0.1\times(1-z^{-2})}{1-0.9z^{-1}+0.809z^{-2}} \tag{6-21}$$

由式(6-21)可以画出这个谐振器的实现框图。首先，把式(6-21)中的$H(z)$表示为$Y(z)/X(z)$，并在等式两边同时乘以$X(z)$，以去除等式左边的分母。这样，式(6-21)变为：

$$Y(z)=\frac{0.1\times(1-z^{-2})X(z)}{1-0.9z^{-1}+0.809z^{-2}} \tag{6-22}$$

令：

$$W(z)=\frac{0.1X(z)}{1-0.9z^{-1}+0.809z^{-2}} \tag{6-23}$$

利用式(6-23)，式(6-22)就变为：

$$Y(z)=W(z)-z^{-2}W(z) \tag{6-24}$$

我们还可以把式(6-23)和式(6-24)转化为一个差分方程组：

$$\begin{cases}w(n)=0.1x(n)+0.9w(n-1)-0.809w(n-2)\\ y(n)=w(n)-w(n-2)\end{cases} \tag{6-25}$$

根据式(6-23)和式(6-24)，或者根据式(6-25)，就可以画出图6-5这样的谐振器实现框图。这个谐振器的幅频响应可以根据零极点的值和式(6-13)逐点算出。此外，我们也可以用6.1节类似的方法，计算出谐振器的带宽、增益和相位特性，并调节谐振器的带宽。

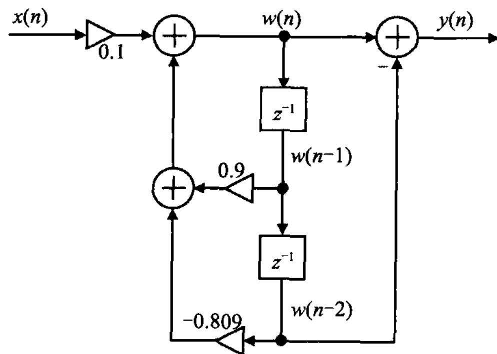


图6-5 一个二阶谐振器的实现框图

6.3 梳状滤波器

梳状滤波器的基本思路是：我们可以通过z变量的代换，使离散时域系统的频率响应在$[0,\omega_S]$范围内呈现某种周期性。所以，我们先来说明如何使频率响应呈现这样的周期性，然后再分析梳状滤波器。

6.3.1 频率响应在[0,ω_S]区间内的周期性

我们来讨论如何通过自变量 z 的代换使离散系统的频率响应在[0,ω_S]区间内具有周期性。比如，有一个离散时域系统的传递函数为 $H(z)$，那么这个离散系统的频率响应就是 $H(e^{j\omega T})$。由于 $e^{j\omega T}$是以 2π 为周期的，所以，$H(e^{j\omega T})$一定也是以 2π 为周期的。(这当然是对的，离散时域系统的频率响应一定是以 ω_S为周期而重复的)。

我们现在用 z^k代替 $H(z)$中的 z，因而传递函数 $H(z)$变为 $H(z^k)$。而且，这个新的传递函数 $H(z^k)$的频率响应应该等于 $H(e^{jk\omega T})$。

根据上面关于 $e^{j\omega T}$以 2π 为周期的结论，新的传递函数的频率响应 $H(e^{jk\omega T})$一定也是以 2π 为周期的。这也可以说成，新传递函数的频率响应 $H(e^{jk\omega T})$是以变量 ωT 的 $2\pi/k$ 为周期的。所以，用 z^k代替 $H(z)$中的 z，实际上就是把原先传递函数 $H(z)$在[0，2π]范围内的频率响应压缩到了[0，$2\pi/k$]的范围内，而且在[0，$2\pi/k$]以上的高频区内还顺序地复制了$(k-1)$个相同的频率响应。

为了验证这个周期性，我们来看一个简单的传递函数：

$$H(z)=1-z^{-1} \tag{6-26}$$

这个传递函数有一个零点在 $z=1$，如图 6-6a 所示。所以，这个滤波器的直流增益为零，具有高通的特性。

如果用 z^k代替式(6-26)中的 z，就得到一个新的传递函数：

$$H_k(z)=1-z^{-k} \tag{6-27}$$

为了便于说明，我们假设 $k=8$。所以，式(6-27)变为：

$$H_8(z)=1-z^{-8} \tag{6-28}$$

根据例 5-4 的分析可以知道，式(6-28)的 8 个根应该均匀地分布在单位圆上，并可以表示为：

$$z_{zm}=e^{j2m\pi/8},\quad m=0,1,2,\cdots,7 \tag{6-29}$$

这 8 个根就是 $H_8(z)$的 8 个零点，并画在了图 6-6b 中。当 $m=0$ 时的根 z_{z0}就是式(6-26)中的那个零点，也就是图 6-6a 中的那个零点。

从图 6-6b 可以看出，传递函数 $H_8(z)$确实在 8 个等间距的频率点上复制了原来传递函数 $H(z)$的直流增益为零的特性。

除了把 $H(z)$的那个零点复制成了 $H_8(z)$的 8 个零点之外，$H_8(z)$在其他频率点上的响应值也同样复制了 $H(z)$相应频率点上的响应值(由于 8 个零点之间的相互影响，这种复制不是完全相同的，而只是形状相似)。这将在下面讨论梳状滤波器时做进一步说明。

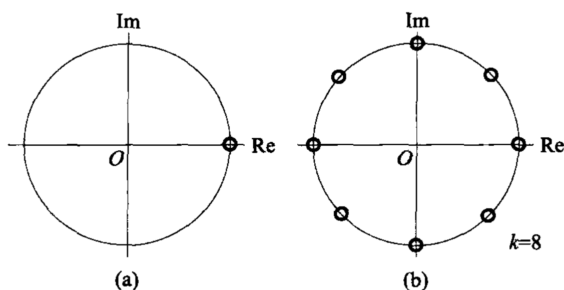


图 6-6 $H(z)$的一个零点被 $H(z^k)$复制成了的 8 个零点

6.3.2 梳状滤波器的分析

我们回到梳状滤波器。梳状滤波器的基本传递函数是:

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} \tag{6-30}$$

这个基本梳状滤波器的零极点位置示于图 6-7a 中。因为它的一个零点在 $z_z=1$，一个极点在 $z_p=a$，所以是一个一阶高通滤波器，它的频率特性与式(6-26)相似。在式(6-30)中多了一个极点，是为了调节频率特性的起伏。具体地说，是为了调节滤波器的频率选择性，也就是调节图 6-8 中的“梳子齿宽”。如果 a 选择得比较大，使极点非常贴近单位圆上的零点，频率响应就变为图 6-2 那样的点阻特性，有很强的频率选择性。如果 a 选择得很小，极点挤在原点附近，频率特性就变为一些缓坡，使选择性很弱。

实际使用的梳状滤波器可以简单地通过用 z^k代替式(6-30)中的 z 得到:

$$H_k(z)=H(z^k)=\frac{b_0(1-z^{-k})}{1-az^{-k}} \tag{6-31}$$

这个梳状滤波器的零极点位置示于图 6-7b 中。图中假定 $k=8$。因此，从每个极点到原点的距离为 $a^{1/k}=a^{1/8}$。

梳状滤波器的频率响应可以表示为:

$$H_k(e^{j\Omega})=\frac{b_0(1-e^{-jk\Omega})}{1-ae^{-jk\Omega}} \tag{6-32}$$

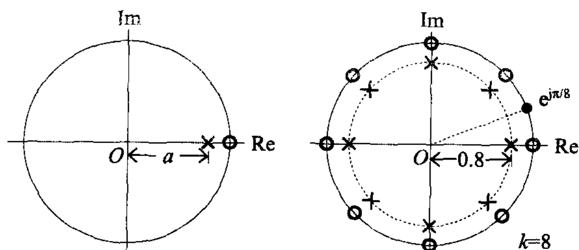
利用式(6-32)，并使 Ω 从 0 变化到 π，就可以得到梳状滤波器的频率响应。我们把计算得到的幅频响应画在图 6-8 中。从图中可以看出，由于 $k=8$，总共有 8 个频率点上的响应为零(图中只画出从 0 到 π 范围内的 5 个这样的频率点)。

我们现在来确定式(6-32)中的 b_0。b_0的作用是把频率响应的最大值调节到 1。

根据图 6-7b 和图 6-8 中的周期性和对称性，b_0的值可以在增益取得最大值的任意一个频率点上进行确定，比如选择 $\Omega=\pi/8$，如图 6-7b 和图 6-8 所示。

根据式(6-32)，由于 $k=8$，我们得到:

$$|H_8(e^{j\pi/8})|=\left|\frac{b_0(1-e^{-j8\pi/8})}{1-ae^{-j8\pi/8}}\right|=\left|\frac{2b_0}{1+a}\right|$$



(a) 基本梳状滤波器的零极点　(b) 实用梳状滤波器的零极点

图 6-7　梳状滤波器的零极点图

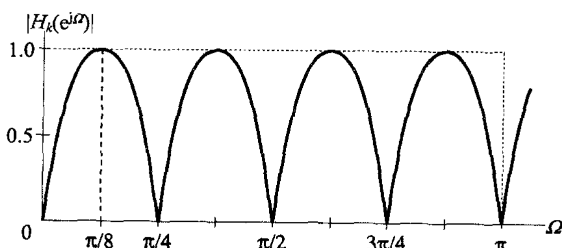


图 6-8　梳状滤波器的幅频响应，$k=8, a^{1/8}=0.8, b_0=0.584$

如果选择 $a^{1/8}=0.8$，即极点到原点的距离为 0.8(图 6-7b 中的情况)，那么 $a=0.16777$。b_0的值为：

$$b_0=\frac{1+a}{2}=\frac{1+0.16777}{2}=0.584$$

最后对梳状滤波器的分析与设计做一个归纳。梳状滤波器的传递函数为式(6-31)，它有 3 个参数：k 确定频率响应在区间$[0,\omega_S]$内的重复周期数，b_0用于调节频率响应的最大值，a 用于调节频率选择性。梳状滤波器因其幅频响应的形状而得名，在抑制工频谐波干扰和雷达信号处理等方面有许多用途。

6.4　平均滤波器

平均滤波器也许是一种最简单的数字滤波器，因而也是最常用的滤波器之一。我们在 2.1 节中曾经提到过这种滤波器。它是对最近的$(M+1)$个样点取平均值作为输出。平均滤波器的时域表达式可以写为：

$$y(n)=\frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M}x(n-m) \tag{6-33}$$

由上式可以得出平均滤波器的传递函数：

$$H(z)=\frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M}z^{-m}=\frac{1}{M+1}\cdot\frac{1-z^{-(M+1)}}{1-z^{-1}} \tag{6-34}$$

为了便于求解零点，我们对式(6-34)的分子与分母同时乘以 z^{M+1}，因此，式(6-34)

变为：

$$H(z)=\frac{z^{-M}}{M+1}\cdot\frac{z^{M+1}-1}{z-1} \tag{6-35}$$

从式(6-35)右边的后一个分式的分子可以求得平均滤波器的$(M+1)$个零点。这个求解方程是：

$$z^{M+1}=1$$

从这个零点求解方程可知，它的$(M+1)$个零点均匀地分布在单位圆上，为：

$$z_{zm}=e^{j2\pi m/(M+1)},\quad m=0,1,2,\cdots,M \tag{6-36}$$

其中，当$m=0$时的零点z_{z0}位于$\exp(j0)=1$。但这个零点实际上被分母中的极点$z_p=1$所抵消。因此，这个滤波器其实只有M个零点。图6-9画出了这个平均滤波器的零点分布，其中$M=7$。

在准确地计算出平均滤波器的频率响应之前，我们先从图6-9中的零点分布来粗略估算这个滤波器的幅频响应。由图6-9可知，滤波器幅频响应的最大值出现在归一化频率$\Omega=0$的频率上，即直流零频。当Ω逐渐增大时，位于单位圆上的频率点$\exp(j\Omega)$与最近的那个零点的距离逐渐变小，因而使增益从最大值逐渐下降，并在$\Omega=\pi/4$时到达滤波器的第一个零点，使增益降到零。然后，随着Ω的继续增大，增益也逐渐增加，并在大约$\Omega=3\pi/8$时达到第一个局部极大值。之后，增益又在$\Omega=\pi/2$时回到零。这样再循环两次之后，归一化频率Ω达到π，滤波器的增益达到它的第四个零值。在这个过程中，单位圆上的频率点$\exp(j\Omega)$与多数零点的距离越来越小，所以，这3个局部极大值也越来越小。这就是图6-11中的幅频响应曲线。在π到2π的频率范围内的滤波器增益与0到π范围内的增益是完全对称的。

我们也可以从时域来解释平均滤波器的频率特性。当增加频率使$\Omega=\pi/4$时，滤波器到达了第一个零点，这就是图6-10a中的情况，图中使用了正弦信号，采样周期为T，信号周期为T_a。这时，信号频率等于采样频率的1/8，或者说，在信号的一个周期内有8个样点。而这样的8个样点一定均匀地分布在正弦信号的一个周期中，比如图6-10a中标有1到8的这8个样点。显然，这8个样点的平均值一定为零。

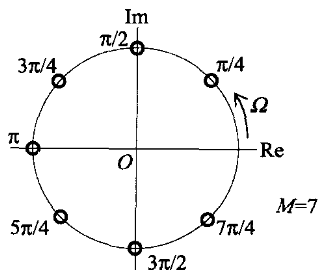


图6-9 平均滤波器的零点分布

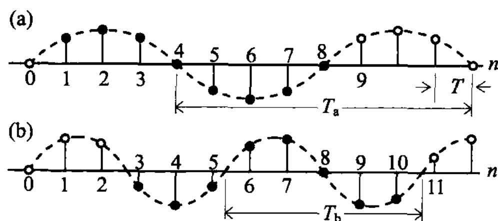


图6-10 平均滤波器频率响应的零值与极大值的时域解释：(a)为$\Omega=\pi/4$，(b)为$\Omega=3\pi/8$

此外，当频率Ω增加到位于两个相邻零点之间的中点(比如$\Omega=3\pi/8$)时，就有图

6-10b 中的情况(这时的信号周期缩短到了 T_b)。这时,连续的8个样点构成了信号的1.5个周期,如图6-10b中标有3到10的这8个样点。在这8个样点中,一定有半个周期的样点没有被抵消,因而使增益达到一个局部极大值。

平均滤波器的幅频响应可以容易地由式(6-34)导出:

$$H(e^{j\Omega})=\frac{1}{M+1}\cdot\frac{1-e^{-j(M+1)\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} \tag{6-37}$$

对上式右边的分子提取公因子 $\exp[-j(M+1)\Omega/2]$,对分母提取公因子 $\exp(-j\Omega/2)$,再使用欧拉恒等变换之后,式(6-37)变为:

$$H(e^{j\Omega})=\frac{e^{-jM\Omega/2}}{M+1}\cdot\frac{\sin[(M+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)} \tag{6-38}$$

由式(6-38)得到平均滤波器的幅频响应:

$$|H(e^{j\Omega})|=\frac{1}{M+1}\left|\frac{\sin[(M+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)}\right| \tag{6-39}$$

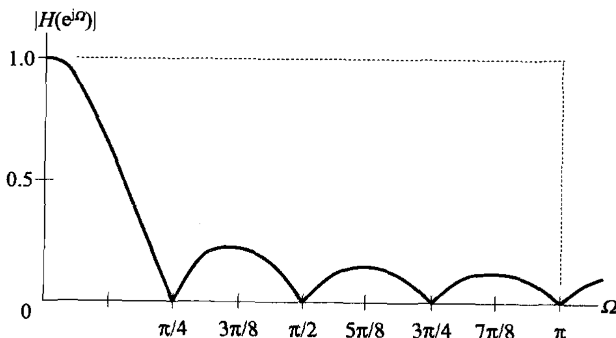


图6-11　平均滤波器的幅频响应,$M=7$

当 M 确定之后,可以根据式(6-39)计算出平均滤波器幅频响应的具体数据,并把这些数据画成幅频响应曲线,如图6-11所示,图中 $M=7$。从图6-11中的曲线可以看出,平均滤波器具有低通的特性,而且在 $\pi/4$、$\pi/2$、$3\pi/4$、π 这4个归一化频率点上的增益为零,在超过 π 的 $5\pi/4$、$3\pi/2$、$7\pi/4$ 这3个频率点上的增益也必然为零。上述这7个增益为零的频率点正好对应图6-9中的7个零点位置。

在结束平均滤波器讨论之前,我们想提及另外两个与平均滤波器很相似的滤波器:移动平均滤波器和 sinc 滤波器。

移动平均滤波器的传递函数可以写为:

$$B(z)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M} \tag{6-40}$$

其中,系数 b_0、b_1、…、b_M 是根据当前被处理信号的统计特性确定的,所以这种滤波器的频率特性反映了被处理信号的特性,因而就不是一个移不变系统。相比之下,本节所讨论的平均滤波器是比较简单的,所以,有时也叫"简单平均滤波器"。

sinc 滤波器是指这样一类滤波器,它的幅频响应有 sinc 函数的形式,可表示为:

$$|H(e^{j\Omega})| = \left|\frac{\sin(n\Omega)}{n\Omega}\right| \tag{6-41}$$

其中，n 为一个任意的整数；Ω 为归一化频率。

在 sinc 滤波器中，分子正弦函数中的 $n\Omega$ 是与分母相同的，如式(6-41)那样。当 Ω 从 0 变化到 π 时，分子的正弦函数已经变化了整整 $n/2$ 个周期，而分母的 $n\Omega$ 则随 Ω 的增加做线性增长。所以，整个分式的值在 $\Omega=0$ 时达到最大值 1，然后随着 Ω 的增加而画出一条衰减的振荡曲线。

把式(6-39)与式(6-41)相比可以发现，式(6-39)中的分子正弦函数的弧度数与分母不相同。但如果把式(6-39)中的两个分母合在一起，就可得到：

$$|H(e^{j\Omega})| = \left|\frac{\sin[(M+1)\Omega/2]}{(M+1)\sin(\Omega/2)}\right| \tag{6-42}$$

由式(6-42)可知，式(6-39)非常相似于 sinc 函数，尤其在 Ω 很小而使分母中的 $\sin(\Omega/2)$ 比较接近 $\Omega/2$ 的时候。

6.5 全通滤波器

全通滤波器的功能是改变信号中某些频率成分的相位，以实现相位均衡。它的幅频响应恒等于 1，与频率无关，因此可以写为：

$$|H(e^{j\omega T})| = 1 \tag{6-43}$$

全通滤波器的一个特点是，它的零极点总是成对出现的，而且每一对零极点有相同的幅角，但它们的模互为倒数。所以，这样的一对零极点可以写为：

$$\begin{cases} z_z = \dfrac{1}{r}e^{j\theta} \\ z_p = re^{j\theta} \end{cases} \tag{6-44}$$

我们先来证明由这样一对零极点组成的滤波器在幅度上具有全通的特性；然后再讨论全通滤波器的相位特性。

图 6-12 中的 z_z 和 z_p 就是这样的一对零极点。图中的 A 是单位圆上的一个任意频率点，零极点的位置由式(6-44)确定。我们需要证明，由这样一对零极点所产生的幅频响应与频率无关，或者说，这样一对零极点在全部频率范围内具有恒定的幅频响应。

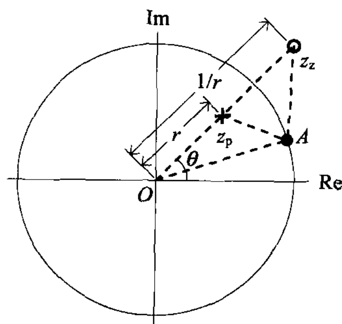


图 6-12 具有全通特性的一对零极点

为此，我们用虚线把 O、z_z、z_p 与 A 连接起来，如图 6-12 所示。可以看出，由这一对零极点引起的、在频率点 A 的增益应该等于线段($A-z_z$)除以线段($A-z_p$)。

在图 6-12 中，有两个三角形是相似三角形：

三角形 $O-A-z_p$ 和三角形 $O-z_z-A$。因为它们有一个公共角 z_z-O-A，而且根据式(6-44)可知，这个公共角的两条对应边成比例，这就是：

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{Oz_p}}=\frac{\overline{Oz_z}}{\overline{OA}} \tag{6-45}$$

由两个三角形相似可知对应边成比例，因此，由这一对零极点所确定的、在频率 A 处的增益可以表示为：

$$\text{频率点 } A \text{ 的增益}=\frac{\overline{Az_z}}{\overline{Az_p}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{Oz_p}}=\frac{1}{r} \tag{6-46}$$

由于频率点 A 是任意选取的，所以，我们就可以得出这样的结论：这样一对零极点在所有频率点上引起的增益都是相等的，而且都等于 $1/r$。这就证明了这样一对零极点的全通特性。

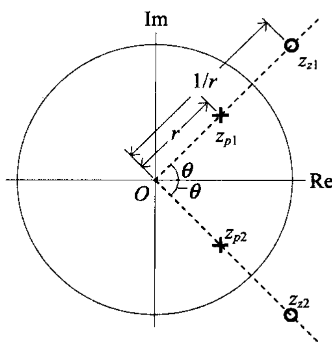


图 6-13　具有全通特性的两对共轭零极点

由于全通滤波器是实系数的，所以，零点与极点都是以共轭复数的形式成对出现的。因此，对于式(6-44)中的一对零极点，也必然存在另一对共轭的零极点。这样就构成了两对零极点，并可写为：

$$\begin{cases} z_{z1,z2}=\dfrac{1}{r}e^{\pm j\theta} \\ z_{p1,p2}=re^{\pm j\theta} \end{cases} \tag{6-47}$$

这两对零极点的位置示于图 6-13 中。

我们可以用这样的两对零极点构成一个二阶全通滤波器，并有下面的传递函数：

$$H(z)=r^2\,\frac{(z-z_{z1})(z-z_{z2})}{(z-z_{p1})(z-z_{p2})} \tag{6-48}$$

其中，因子 r^2 是为了使全通滤波器的增益等于 1[由式(6-46)可知，一对零极点的增益为 $1/r$]。把式(6-47)中的零极点代入式(6-48)，然后展开式(6-48)，得到：

$$\begin{aligned} H(z)&=r^2\,\frac{(z-r^{-1}e^{j\theta})(z-r^{-1}e^{-j\theta})}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} \\ &=\frac{(rz-e^{j\theta})(rz-e^{-j\theta})}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} \\ &=\frac{r^2z^2-2r(\cos\theta)z+1}{z^2-2r(\cos\theta)z+r^2} \\ &=\frac{r^2-2r(\cos\theta)z^{-1}+z^{-2}}{1-2r(\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}} \end{aligned} \tag{6-49}$$

式(6-49)是二阶全通滤波器传递函数的一般形式；其中，r 为极点到原点的距离，θ 为零极点所在半径的幅角。

式(6-49)可以写成另一种形式：

$$H(z)=\frac{a_2+a_1z^{-1}+z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{6-50}$$

其中，$a_1=-2r\cos\theta, a_2=r^2$。从式(6-49)和式(6-50)可知，全通滤波器传递函数的分子与分母中的系数是对称的，所以，描述一个二阶全通滤波器只要两个参数，即 r 与 θ 或者 a_1 与 a_2。

全通滤波器的主要用途是修改信号的相位。为此，我们来计算一个二阶全通滤波器的相频特性。为了便于计算，假设滤波器的两个系数为：

$$\begin{cases} r=0.8 \\ \theta=\pi/4 \end{cases} \tag{6-51}$$

因而，全通滤波器的两对零极点为：

$$\begin{cases} z_{z1,z2}=1.25\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\pi/4} \\ z_{p1,p2}=0.8\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\pi/4} \end{cases} \tag{6-52}$$

把上式代入式(6-48)，就得到这个全通滤波器的传递函数：

$$H(z)=0.64\times\frac{(z-1.25\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4})(z-1.25\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4})}{(z-0.8\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4})(z-0.8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4})} \tag{6-53}$$

把上式转换成频率响应的形式，然后使频率 Ω 沿着单位圆从 0 变到 π，就可以计算出这个滤波器的相位特性，如图 6-14 所示。由图 6-14 可知，当频率达到 $\pi/4$ 时，相位的改变量达到 π，其他频率上的相位改变量都小于 π。

注意：图 6-14 中那条垂直的虚线不是相位突变。当相位超出 $[-\pi,\pi]$ 之后，可以加或减 2π，使其回到 $[-\pi,\pi]$ 的范围。所以，在整个频率范围内，相移是连续的。

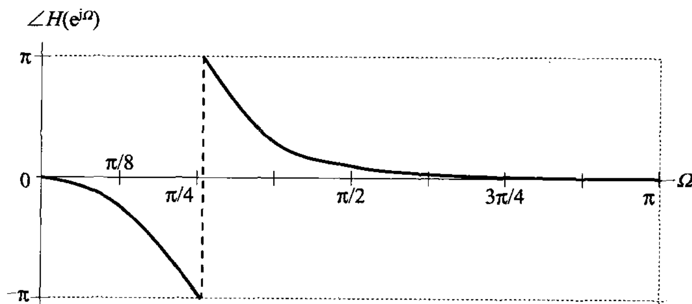


图 6-14　二阶全通滤波器的相频响应，$r=0.8, \theta=\pi/4$

由图 6-14 还可以看出，相位的修改不像幅度修改那么容易，一般是比较困难的。但如果把图 6-13 中的零极点移到非常贴近单位圆的时候，全通滤波器的相频特性可以变为只在一个频率点上有 180°的相移，而在其他频率上的相移都几乎等于零。

习题

6.1　一个两项简单平均滤波器的差分方程为：

$$y(nT)=0.5[x(nT)+x(nT-T)]$$

试确定系统的传递函数，并画出系统的幅频与相频响应曲线。

6.2　找出下面梳状滤波器传递函数中的 b_0，使滤波器的峰值增益等于1，并画出滤波器的零极点图和幅频响应。

$$H(z)=b_0\frac{1-z^{-4}}{1-(0.8)^4z^{-4}}$$

6.3　一种简单而有用的滤除噪声的技术叫做“5平均与7平均方法”。它由一个5样点平均滤波器和一个7样点平均滤波器串联而成。

(1) 给出整个滤波器的冲击响应 $h(n)$。

(2) 计算出整个滤波器的时间延迟。

(3) 画出整个滤波器的零极点图。

6.4　一个一阶低通滤波器的传递函数为：

$$H(z)=b_0\frac{1+z^{-1}}{1-cz^{-1}},\quad |z|>c,\quad c>0$$

(1) 画出滤波器大概的幅频响应。

(2) 计算增益峰值出现的频率点以及使峰值增益等于1的 b_0 值。

(3) 找出参数 c，使3 dB截止频率 $\omega_C=0.01\omega_S$，其中 ω_S 为采样频率。

6.5　一个离散系统有下列传递函数：

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.1z^{-1}-1.32z^{-2}}$$

(1) 判定该滤波器是否稳定。为什么？

(2) 如果不稳定，试给出稳定的且具有相同幅频响应的传递函数。

(3) 画出最后的离散系统的幅频响应曲线。

第 7 章 数字滤波器

数字滤波器的设计目标是找出满足要求的系统传递函数或冲击响应。这可以分为两种设计方法：IIR 滤波器的设计方法和 FIR 滤波器的设计方法。我们将分别讨论这两种数字滤波器的设计方法。由于今天的滤波器设计大多可以使用设计工具来完成，所以，在本章的最后将概要介绍如何利用 MATLAB 进行数字滤波器设计。

7.1 模拟滤波器设计

把模拟滤波器设计作为本章的开始，有两个目的。首先，IIR 数字滤波器的设计是从模拟滤波器开始的；其次，对模拟滤波器特性的描述同样适用于数字滤波器的分析与设计。

7.1.1 常用模拟滤波器

在讨论滤波器的时候，我们总要先说明什么是理想滤波器。理想滤波器是一种只有通带和阻带而没有过渡带的滤波器。而且，通带中的增益为常数，阻带中的增益为零。由于理想滤波器从通带到阻带是完全陡直的，所以也被叫做“砖墙”滤波器。理想滤波器是不可实现的。

实际滤波器的频带分为 3 部分：通带、过渡带和阻带，如图 7-1 所示。通带内的增益不必是常数，可以有一些波动；阻带内的衰减不必是零，但必须小于某个值；过渡带的宽度不必为零，但希望滚降率大一些，因而过渡带可以窄一些。有时，我们对实际滤波器也还有群延迟的要求（群延迟定义为相移对于频率的导数的负值，用来表示同一频带内的相移特性）。比如，通带内的群延迟尽可能地比较恒定。对过渡带和阻带内的群延迟一般没有什么要求和限制。此外，这里所叙述的滤波器都是指低通滤波器，但所描述的特性同样适用于带通、带阻或高通滤波器。

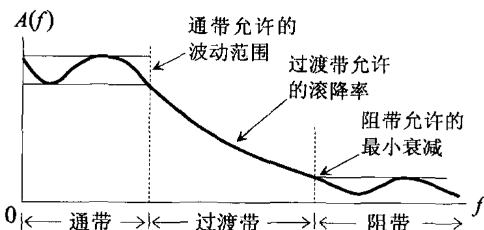


图 7-1　实际滤波器的通带、过渡带和阻带

对于图 7-1 中的滤波器要求，可以用不同类型的滤波器来实现。下面对 4 种常用的模拟滤波器做一个简要说明，图 7-2 中画出了这 4 种滤波器的归一化幅频响应。这个归一化有两个意思：首先是指低通滤波器，其次是指滤波器的截止频率等于 1 rad/s。在一般的滤波器设计书籍和手册中都可以找到模拟滤波器的设计数据。

巴特沃斯滤波器（图 7-2a）也许是最常用的一种滤波器，它的特点是通带内有最大的平坦性，也有较好的群延迟。通带的边缘（也就是截止频率）定义为增益降低到直流增益的－3 dB 的频率点。在全部频率范围内，它的增益随频率的增加而单调下降。

第一类切比雪夫滤波器（图 7-2b）通带内的增益呈等纹波的起伏。正因为这个起伏，才使它的过渡带有比较陡的滚降率。在通带之外的增益呈单调下降。它比巴特沃斯滤波器的截止特性好。通带内增益的起伏是可以选择的。图 7-2b 中选择的6 dB是比较大的，完全可以选择得更小，比如 1 dB 或更小。

第二类切比雪夫滤波器（图 7-2c）在通带内是单调下降的，但在阻带内是等纹波的。阻带的开始点是可以选择的，图 7-2c 中选择了－20 dB 为阻带的最小衰减量。

椭圆滤波器（图 7-2d）是第一类和第二类切比雪夫滤波器的组合。它在通带和阻带内的增益都是有起伏的。椭圆滤波器的优点是有最窄的过渡带。图 7-2d 中选择了 6 dB的通带纹波和－20 dB 的阻带最小衰减。

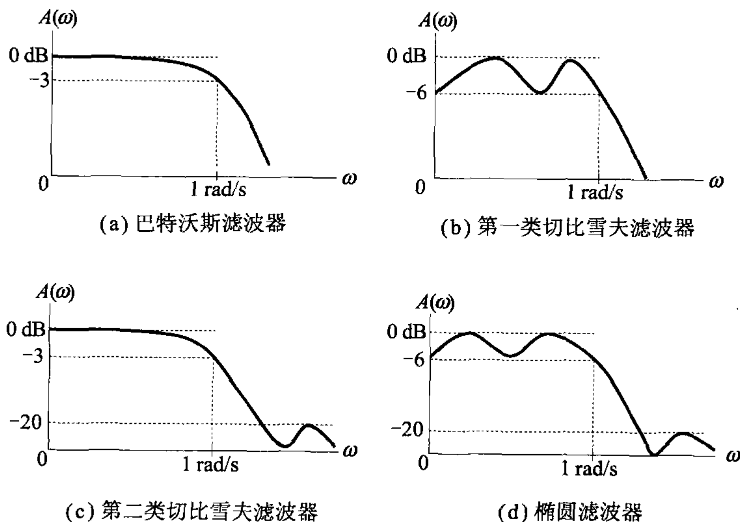


图 7-2　4 种常用滤波器的归一化幅频响应

7.1.2　滤波器的频率变换

滤波器设计手册上查到的滤波器都是归一化的低通滤波器。在实际设计滤波器时，要把这些归一化的滤波器转换成所需的滤波器，这个过程叫滤波器的频率变换，包括频带伸缩和频带转换。

1. 频带伸缩

频带伸缩的目的是把 1 rad/s 的归一化截止频率按比例扩大到所需的截止频率 ω_C 上。方法很简单,只要在归一化滤波器的传递函数中用 s/ω_C代替 s。下面就是这样的一个例子。

要求找出一个截止频率等于 150 Hz 的三阶巴特沃斯滤波器的传递函数。

由手册可以查得三阶巴特沃斯滤波器的传递函数为:

$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} \tag{7-1}$$

把 s/ω_C代替上式中的 s 之后,就可得到:

$$H_L(s)=\frac{1}{(s/\omega_C)^3+2(s/\omega_C)^2+2(s/\omega_C)+1}=\frac{\omega_C^3}{s^3+2\omega_C s^2+2\omega_C^2 s+\omega_C^3}$$

其中,ω_C为所需的截止频率。

再把 $\omega_C=2\pi\times 150=300\pi$ 代入上式,就得到所要的巴特沃斯滤波器的传递函数:

$$H_L(s)=\frac{837\ 169\ 470}{s^3+1885s^2+1\ 776\ 529s+837\ 169\ 470}$$

2. 低通转换成高通

把低通滤波器转换成高通滤波器的方法是用 ω_C/s 代替低通滤波器中的 s,其中的 ω_C是所需的高通滤波器的截止频率。

比如有一个归一化的一阶巴特沃斯滤波器:

$$H(s)=\frac{1}{s+1} \tag{7-2}$$

在用 ω_C/s 代替上式中的 s 之后,就得到截止频率等于 ω_C的高通滤波器:

$$H_H(s)=\frac{1}{\omega_C/s+1}=\frac{s}{\omega_C+s} \tag{7-3}$$

下面验证这个高通滤波器。在直流情况下,$s=j0=0$,所以,式(7-3)中的高通滤波器的增益等于零。当频率为无穷大时,$s=j\infty$,因此,式(7-3)中的 ω_C 可以略去,增益就等于 1。当频率等于 ω_C时,$s=j\omega_C$。把它代入式(7-3)之后,就得到滤波器的增益等于 0.707。所以,这个滤波器确实是所需要的高通滤波器。

3. 低通转换成带通

带通滤波器的设计目标是 ω_C和 ω_B,其中,ω_C为带通滤波器的中心频率,ω_B为通带的宽度。当把归一化的低通滤波器转换成带通滤波器的时候,ω_C对应于原来归一化滤波器的零频,而通带的两个端点频率 ω_H和 ω_L对应于归一化滤波器的截止频率,而且,带通滤波器的通带中心频率应该是通带的两个端点频率的比例中项,这就是 $\omega_C^2=\omega_L\omega_H$。

把归一化的低通滤波器转换成带通滤波器的方法,就是用$(s^2+\omega_C^2)/(s\omega_B)$代替归一化滤波器传递函数中的 s,这可以写为:

$$H_{bp}(s)=H\left(\frac{s^2+\omega_C^2}{s\omega_B}\right) \tag{7-4}$$

其中，$H(s)$为归一化滤波器的传递函数，$H_{bp}(s)$为我们想要的带通滤波器的传递函数。

我们仍然用式(7-2)中的一阶巴特沃斯滤波器的传递函数作为归一化滤波器的传递函数。在使用了式(7-4)中的变量代换之后，式(7-2)就变为我们所要的带通滤波器的传递函数：

$$H_{bp}(s)=\frac{s\omega_B}{s^2+s\omega_B+\omega_C^2} \tag{7-5}$$

下面验证式(7-5)频率变换的正确性。首先验证中心频率ω_C。为此，只需将$j\omega_C$代替式(7-5)中的s。代入之后，式(7-5)变为：

$$H_{bp}(s)\Big|_{s=j\omega_C}=\frac{j\omega_C\omega_B}{-\omega_C^2+j\omega_C\omega_B+\omega_C^2}=1$$

上式指出带通滤波器中心频率ω_C处的增益为1。这就是说，我们确实把归一化滤波器的直流增益搬移到了带通滤波器的中心频率ω_C处。

在验证滤波器通带的时候，先要计算出带通滤波器的高低截止频率。根据ω_C与通带两端截止频率之间的比例中项关系，可以计算出通带的高低截止频率：

$$\omega_{L,H}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_B^2+4\omega_C^2}\pm\omega_B\right) \tag{7-6}$$

为了便于说明，我们使用具体的数据。比如，需要的带通滤波器的通带中心频率$\omega_C=100$，通带的带宽$\omega_B=10$。因此，由式(7-6)可以计算出通带的高低截止频率：$\omega_H=105.125$，$\omega_L=95.125$。

首先验证ω_L是通带的低端频率。把$s=j\omega_L=j95.125$代入式(7-5)中，同时也要把$\omega_C=100$和$\omega_B=10$一起代入式(7-5)中。代入之后，得到通带低端频率处的增益：

$$\begin{aligned}H_{bp}(s)\Big|_{s=j\omega_L}&=\frac{j95.125\times10}{-9048.75+j95.125\times10+10\,000}\\&=\frac{j951.25}{951.25+j951.25}\\&=\frac{1}{1-j}\\&=0.707\angle45^\circ\end{aligned}$$

所以，滤波器通带低端频率处的增益为0.707(或−3 dB)，确实等于归一化低通滤波器截止频率处的增益。

如果把通带高端的频率值$\omega_H=105.125$代入式(7-5)，可以得到同样的结果。所以，式(7-4)的频率变换是正确的。

由式(7-4)和式(7-5)还可以看出，带通滤波器的阶数是低通滤波器的两倍。此外，把归一化的低通滤波器转换成带阻滤波器的方法是相似的。最后，我们把几种频率变换的公式列在表7-1中。

表 7-1 滤波器频率变换公式

变换方式	变换公式	说 明
频带伸缩	$s/\omega_C \to s$	ω_C：低通截止频率
低通变高通	$\omega_C/s \to s$	ω_C：高通截止频率
低通变带通	$(s^2+\omega_C^2)/(s\omega_B) \to s$	ω_C：通带中心频率。ω_B：通带宽度
低通变带阻	$(s\omega_B)/(s^2+\omega_C^2) \to s$	ω_C：阻带中心频率。ω_B：阻带宽度

7.2 数字滤波器的实现

数字滤波器的实现是指用框图的形式表示离散系统中各序列之间的计算关系。框图中通常包含延迟、乘法和加法等操作。在计算离散系统时域输出的时候，一般都要使用实现框图。框图的结构分为直接形式、串联形式和并联形式。下面分别叙述这些不同的实现形式。

7.2.1 直接形式

一个离散系统的差分方程一般可以写成式(5-14)的形式。我们把式(5-14)分为关于 $x(n)$ 和关于 $y(n)$ 的两部分，并用 $w(n)$ 表示关于 $x(n)$ 的那部分。因而，式(5-14)可以改写为：

$$\begin{cases} w(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_kx(n-k) \\ y(n)=w(n)-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)\cdots-a_my(n-m) \end{cases} \tag{7-7}$$

我们把式(7-7)中关于 $x(n)$ 的等式画成图 7-3 左边的样子，再把式(7-7)中关于 $y(n)$ 的等式画成图 7-3 右边的样子。它们之间用 $w(n)$ 来联系。图 7-3的框图实现叫做直接形式 I。

根据线性系统的可交换性，我们把图 7-3 的左右两半交换位置。这样交换之后，图 7-3 的左右两半中那些对应的单位延迟 z^{-1} 上的数据是完全一样的。因此，这些单位延迟可以两两合并起来。经过合并之后的样子如图 7-4 所示，图中的实现框图叫做直接形式Ⅱ。直接形式Ⅱ比直接形式Ⅰ少用了一半的延迟单元，因此减少了存储量和移位操作。

上面的直接形式Ⅰ和直接形式Ⅱ的框图结构是从差分方程(7-7)导出的，但也可以从传递函数导出。我们以直接形式Ⅱ为例来说明。比如有一个传递函数：

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1.0+0.5z^{-1}}{1.0-1.8z^{-1}+0.9z^{-2}} \tag{7-8}$$

对式(7-8)两边同时乘以 $X(z)$，并令：

$$V(z)=\frac{X(z)}{1.0-1.8z^{-1}+0.9z^{-2}} \tag{7-9}$$

对式(7-9)去分母和移项后，变为：

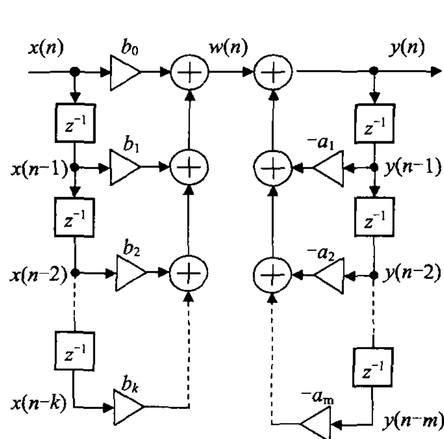


图 7-3　离散系统的一种实现形式：直接形式 I

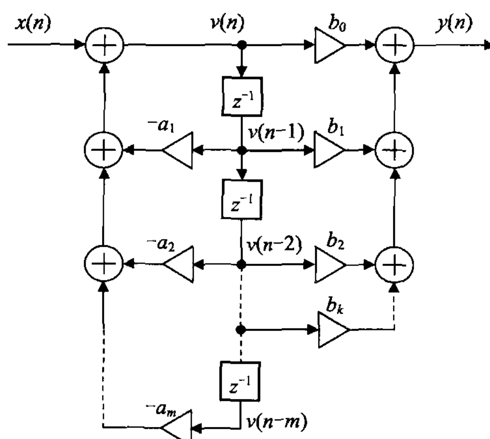


图 7-4　离散系统的另一种实现形式：直接形式Ⅱ，其中，$k<m$

$$V(z)=X(z)+1.8z^{-1}V(z)-0.9z^{-2}V(z) \tag{7-10}$$

因而，式(7-8)中的 $Y(z)$ 可表示为：

$$Y(z)=V(z)(1.0+0.5z^{-1})=V(z)+0.5z^{-1}V(z) \tag{7-11}$$

也可以写出与式(7-10)和式(7-11)对应的差分方程组：

$$\begin{cases} v(n)=x(n)+1.8v(n-1)-0.9v(n-2) \\ y(n)=v(n)+0.5v(n-1) \end{cases} \tag{7-12}$$

利用式(7-10)和式(7-11)或者利用式(7-12)，就可以画出式(7-8)所表示的离散系统的直接形式Ⅱ的实现框图，如图 7-5 所示。图 7-5 中，信号的时域表示和 z 变换表示是等价的，比如，时域的 $x(n-2)$ 等价于 z 变换的 $z^{-2}X(z)$。

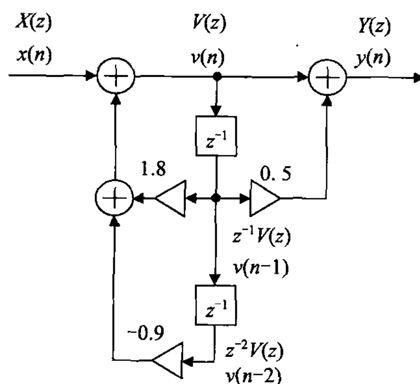


图 7-5　离散系统的直接形式Ⅱ的实现框图

7.2.2 串联形式

当离散系统传递函数的分子与分母可以分解为因式连乘的时候，系统的框图实现可以画成串联形式的样子。我们用一个具体的传递函数来说明。

假设这个传递函数是：

$$H(z)=3.2z^{-2}\frac{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1})}{(1+0.35z^{-1})}\cdot\frac{(1+1.98z^{-1}+1.0z^{-2})}{(1-1.2z^{-1}+0.5z^{-2})(1-1.85z^{-1}+0.9z^{-2})} \tag{7-13}$$

这个传递函数包含一个常数增益项 3.2，两个单位延迟 z^{-1}，4 个零点和 5 个极点。为了方便串联形式的实现，我们把式(7-13)中的 2 个分式配对成 3 个分式：

$$H(z)=3.2\times z^{-2}\frac{(1-0.5z^{-1})}{(1+0.35z^{-1})}\cdot\frac{(1+0.9z^{-1})}{(1-1.2z^{-1}+0.5z^{-2})}\cdot\frac{(1+1.98z^{-1}+1.0z^{-2})}{(1-1.85z^{-1}+0.9z^{-2})} \tag{7-14}$$

从式(7-14)来看，这个传递函数可以用一个一阶环节和两个二阶环节来实现。具体的实现框图画在图 7-6 中。图中的顺序与传递函数中的顺序相同，每一个环节都是用直接形式Ⅱ实现的。

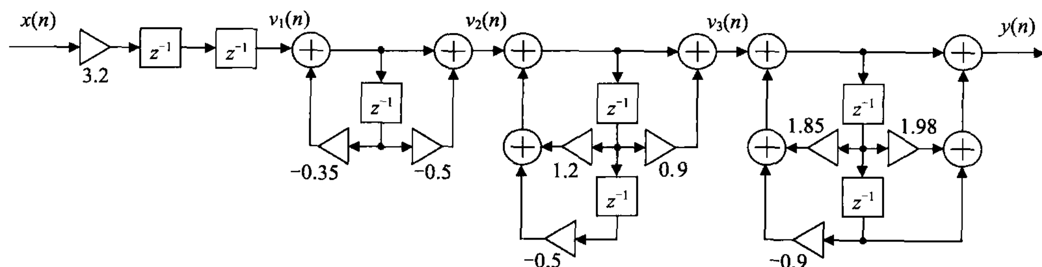


图 7-6 离散系统的一种实现形式——串联形式

7.2.3 并联形式

当离散系统的传递函数可以分解为若干个分式之和的时候，系统的框图实现可以画成并联的形式。比如有一个传递函数：

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}+z^{-2}}{(1-0.8z^{-1})(1-z^{-1}+0.5z^{-2})} \tag{7-15}$$

我们用部分分式法来分解式(7-15)，首先把式(7-15)的右边变为两个分式之和：

$$H(z)=\frac{A}{1-0.8z^{-1}}+\frac{B+Cz^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \tag{7-16}$$

将式(7-16)的右边通分，再把通分之后的分子与式(7-15)的分子进行比较，就可计算出：

$$\begin{cases}A=0.75\\B=1.25\\C=-1.25\end{cases}\tag{7-17}$$

所以，式(7-16)变为：

$$H(z)=\frac{0.75}{1-0.8z^{-1}}+\frac{1.25(1-z^{-1})}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}\tag{7-18}$$

式(7-18)可以方便地用并联形式来实现，如图7-7所示。图中的框图分为上下两条支路，分别实现了传递函数(7-18)的前后两个分式。

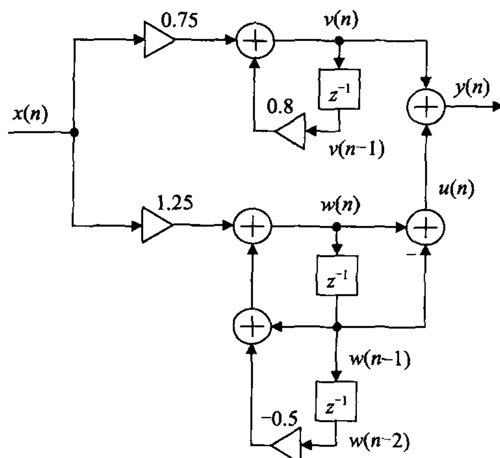


图7-7　离散系统的一种实现形式——并联形式

图7-7中的并联形式可以对应于下面的差分方程组：

$$\begin{cases}v(n)=0.75x(n)+0.8v(n-1)\\w(n)=1.25x(n)+w(n-1)-0.5w(n-2)\\u(n)=w(n)-w(n-1)\\y(n)=v(n)+u(n)\end{cases}\tag{7-19}$$

7.3　IIR滤波器设计

在讨论数字滤波器设计之前，首先对FIR滤波器和IIR滤波器的特点做一个简要的比较。

FIR滤波器的优点是它的线性相移和无条件稳定性，而IIR的优点是结构比较简单。一般来说，如果对所设计的滤波器有线性相移的要求，那就要用FIR滤波器。如果不要求线性相移，那么IIR和FIR这两种滤波器都可以使用。但在相同的计算复杂性的前提下，IIR滤波器有比较好的过渡带和阻带特性。究竟选择哪一种滤波器，主要取决于所要求的频率特性以及可用的资源。

IIR 滤波器设计的第一步是根据数字滤波器的设计要求，确定相应的模拟滤波器的传递函数。这主要包括确定滤波器的类型（是巴特沃斯滤波器还是切比雪夫滤波器等）和阶数。所以，第一步所做的是一个核查图表的过程。在确定了模拟滤波器的传递函数之后，接下来要做的是把模拟滤波器的传递函数转换成数字滤波器的传递函数。这种转换有若干种方法。在这一节中，我们将叙述两种转换方法：单位冲击不变性和双线性变换。

7.3.1 单位冲击不变性

单位冲击不变性的设计目标是使设计出的数字滤波器的单位冲击响应 $h(n)$ 与对应的模拟滤波器的单位冲击响应的采样值 $h_a(n)$ 完全一样。这可以表示为：

$$h(n)=h_a(n) \quad n=0,1,2\cdots \tag{7-20}$$

其中，$h_a(n)$ 是模拟滤波器的冲击响应 $h_a(t)$ 被采样后得到的离散序列。

应该说，这是一个比较简单的设计方法。但由于模拟滤波器一般表示为以 s 为自变量的传递函数，因此，这种设计方法的一个难点是如何把连续时域中的传递函数转换成连续时域中的单位冲击响应。如果传递函数比较简单，这种转换就比较简单。比如，我们已经通过图表和恰当的频率变换找到了下面的模拟滤波器传递函数：

$$H_a(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{5}{s+5} \tag{7-21}$$

它的两个极点分别在 $s=-2$ 和 $s=-5$，所以具有低通滤波的效应。把这个传递函数转换成单位冲击响应是比较简单的，因为由查表可知，式(7-21)中的两个分式各自对应一个衰减的指数信号：

$$\begin{cases} H_{a1}(s)=\dfrac{3}{s+2} \Rightarrow h_{a1}(t)=3\mathrm{e}^{-2t} \\ H_{a2}(s)=\dfrac{5}{s+5} \Rightarrow h_{a2}(t)=5\mathrm{e}^{-5t} \end{cases}$$

所以，模拟滤波器的总的单位冲击响应是：

$$h_a(t)=3\mathrm{e}^{-2t}+5\mathrm{e}^{-5t}$$

对这个连续时域的单位冲击响应进行采样之后就可得到：

$$h(n)=h_a(n)=3\mathrm{e}^{-2nT}+5\mathrm{e}^{-5nT} \quad n=0,1,2,\cdots \tag{7-22}$$

其中，T 为数字滤波器的采样周期，而 $h(n)$ 就是我们所需要的数字滤波器的单位冲击响应。

式(7-22)的数字滤波器的单位冲击响应是无限长的。我们对它取 z 变换：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(3\mathrm{e}^{-2nT}+5\mathrm{e}^{-5nT})z^{-n}=3\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{2T}z)^{-n}+5\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{5T}z)^{-n} \tag{7-23}$$

式(7-23)中的两个连加运算是两个等比级数，只要在收敛域内就可以化简为两个分式。对照例 4-3，在 $|z|>\mathrm{e}^{-2T}$（因为 $\mathrm{e}^{-2T}>\mathrm{e}^{-5T}$）的范围内，式(7-23)可以化简为两个分式之和：

$$H(z)=\frac{3}{1-e^{-2T}z^{-1}}+\frac{5}{1-e^{-5T}z^{-1}} \qquad (7\text{-}24)$$

式(7-24)就是用单位冲击不变性的设计方法得出的数字滤波器的传递函数。我们可以容易地由这个传递函数画出实现框图,如图7-8所示。另外,式(7-21)中s平面内的两个极点 $s=-2$ 和 $s=-5$ 现在变换成了式(7-24)中z平面内的两个极点 $z=e^{-2T}$ 和 $z=e^{-5T}$。由于 $T>0$,这两个极点都在单位圆内,因此,这个数字滤波器是稳定的。而且,由于两个极点都在单位圆内的正实轴上,所以,这个数字滤波器也一定表现为低通滤波的特性。

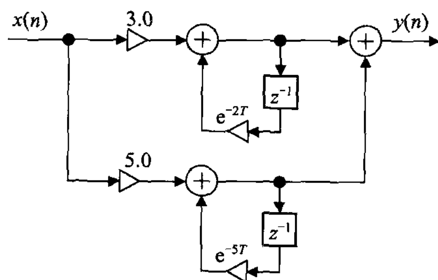


图7-8　单位冲击不变性设计的并联实现

但是,对式(7-21)稍加注意就会发现,因为这个模拟滤波器的两个极点分别位于 $s=-2$ 和 $s=-5$,所以,它的幅频响应虽然随着频率的增加而逐渐衰减,但永远不等于零。对这样一个连续时域滤波器的冲击响应进行采样,一定会产生频率混叠。下一节要叙述的双线性变换的设计方法可以避免这种频率混叠。

7.3.2　双线性变换

双线性变换是指通过一个双线性变换式,把 s 域上的传递函数转变成 z 域上的传递函数。我们主要叙述低通滤波器的变换过程;对于高通和带通滤波器的情况,只需增加一次 s 域或 z 域上的频率变换(参考文献4中的4.7节叙述了离散时域中的频率转换)。

双线性变换的设计方法分3步完成。第一步,找出归一化模拟滤波器的传递函数。第二步,把归一化模拟滤波器的截止频率按比例扩展到数字滤波器的截止频率上。第三步,利用双线性变换把频率扩展后的模拟滤波器从 s 域变换到 z 域,由此得到所需的数字滤波器的传递函数。

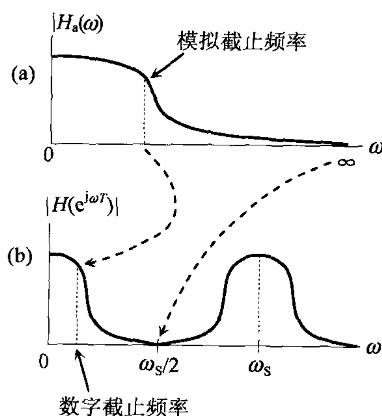


图7-9　把模拟滤波器的频率范围压缩到数字滤波器的频率范围

双线性变换的设计方法避免了7.3.1节单位冲击不变性设计中的频率混叠现象。它的做法是,首先把模拟滤波器从0到∞的频率范围压缩到数字滤波器从0到 $\omega_S/2$ 的频率范围,如图7-9所示。图7-9a是模拟低通滤波器的幅频响应,它的频率范围非常宽,可以延伸到无穷大。图7-9b是相应的数字滤波器的幅频响应,它把模拟滤波

器的全部频率范围压缩到了$[0,\omega_S/2]$。与此同时，模拟滤波器的截止频率也映射到了数字滤波器的截止频率上。

上面这个频率压缩和映射是依靠下面的双线性变换完成的：

$$s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{7-25}$$

其中的C是待定常数，也是我们要确定的设计参数。

从式(7-25)可以看出，z 平面内的$z=1$映射到了 s 平面内的$s=0$，这是数字滤波器与模拟滤波器在零频(直流)特性上的映射。另外，z 平面内的复数点$z=-1$映射到了 s 平面内的$s=\infty$，这是数字滤波器的$\omega_S/2$频率点与模拟滤波器的无穷大频率点之间的特性映射。在这两对频率端点之间的每一个频率点也都是一对一映射的。比如，z 平面单位圆上的$z=e^{j\pi/2}$表示数字滤波器的等于采样频率 1/4 的频率点；通过式(7-25)得到 s 平面内的点是$s=Cj$。这个s点位于虚轴上，所以对应模拟滤波器的一个频率点，但具体的频率值将由常数C确定。

所以，双线性变换的基本原理是：式(7-25)双线性变换式中的分式保证了模拟滤波器与数字滤波器在它们的全部频率响应范围内的映射关系，而待定常数C则确定了两个频率范围内的两个特定频率点之间的映射关系。对于滤波器来说，这个特定频率点就是截止频率。

我们来确定常数C。由于C规定了两类滤波器在两个频率点上的相互映射，必须把式(7-25)的两边都转化为频率的形式。这就是，式(7-25)中的s用$j\omega_a$代替，z用$\exp(j\omega T)$代替[根据式(5-29)]。然后，再对式(7-25)右边的分子与分母同时乘以$\exp(j\omega T/2)$。这个演算过程可以写为：

$$j\omega_a=C\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}}=C\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}} \tag{7-26}$$

其中，ω_a为模拟滤波器的一个频率点，ω为数字滤波器的一个与ω_a对应的频率点。

对式(7-26)右边使用欧拉恒等式代换之后，可以得到：

$$\omega_a=C\tan(\omega T/2) \tag{7-27}$$

或者写为：

$$C=\omega_a\cot(\omega T/2) \tag{7-28}$$

由式(7-27)和式(7-28)可知，它们仍然保持了两类滤波器之间的正确的频率映射关系。现在令ω_a为模拟滤波器的截止频率，ω为数字滤波器的截止频率，就可以确定参数C，因而就确定了双线性变换式。一旦有了双线性变换式，就不难把模拟滤波器的传递函数变换成数字滤波器的传递函数。

下面通过一个例子来具体说明双线性变换的设计过程。

例 7-1 设计一个一阶数字低通滤波器，要求低通截止频率$f_C=500$ Hz。数字滤波器的采样频率$f_S=4000$ Hz。

通过查表可以得到归一化一阶巴特沃斯模拟滤波器的传递函数：

$$H(s)=\frac{1}{s+1} \tag{7-29}$$

首先把归一化的截止频率扩展到等于数字滤波器的截止频率 500 Hz。这可以用变量代换：

$$s \Rightarrow \frac{s}{\omega_C}=\frac{s}{2\pi f_C}=\frac{s}{1000\pi} \tag{7-30}$$

把上式代入式(7-29)中的 s 之后，可以得到：

$$H(s)=\frac{1000\pi}{s+1000\pi} \tag{7-31}$$

现在来确定常数 C。这可以用式(7-28)来计算：

$$C=\omega_a \cot\left(\frac{\omega T}{2}\right)=1000\pi\times\cot\left(\frac{1000\pi}{2\times4000}\right)=7582$$

所以，双线性变换式(7-25)变为：

$$s=7582\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

把上式代入式(7-31)之后，就得到所需的数字滤波器的传递函数：

$$H(z)=\frac{1000\pi(1+z^{-1})}{7582(1-z^{-1})+1000\pi(1+z^{-1})}=\frac{0.2929(1+z^{-1})}{1-0.4142z^{-1}} \tag{7-32}$$

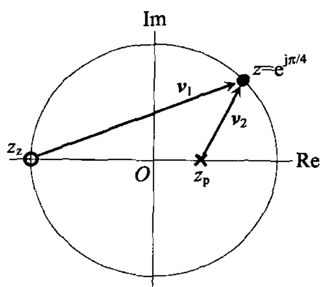


图 7-10　用零极点图验证数字滤波器的截止频率

在完成了滤波器设计之后，我们来验证这个数字滤波器。首先，令 $z=1$，得到直流增益等于 1。然后，令 $z=-1$，得到折叠频率处的增益等于零。所以，作为一个低通滤波器，在频率范围的两个端点上的响应是正确的。在验证滤波器截止频率的时候，我们可以借助图 7-10 的零极点图解法。图 7-10 中的 $z=\exp(j\pi/4)$ 对应于数字滤波器的500 Hz的频率点。图中还标出了数字滤波器的一个零点位于 $z_z=-1$，一个极点位于 $z_p=0.4142$。通过简单的几何计算可以知道，从零点 z_z 到信号频率点 $z=\exp(j\pi/4)$ 的矢量 v_1 的长度为 1.848，从极点 z_p 到信号频率点 $z=\exp(j\pi/4)$ 的矢量 v_2 的长度为 0.765。所以，当频率等于 500 Hz 时这个数字滤波器的增益为 $0.2929\times1.848\div0.765=0.707$，也就是 -3 dB。因此，所设计的滤波器在 3 个主要频率点上的增益是正确的，应该是我们所需要的。

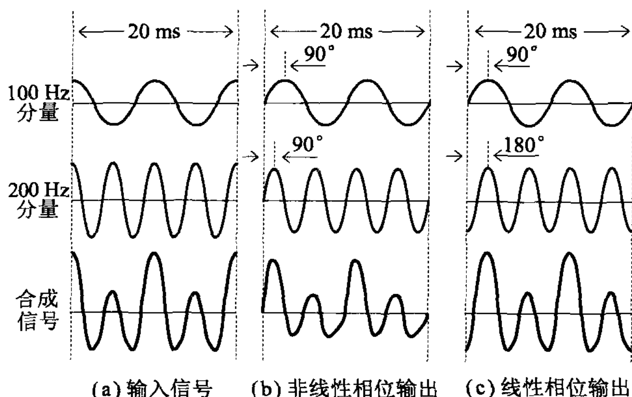
7.4　FIR 滤波器设计

FIR 滤波器最有用的特点是它的线性相位特性。因此，在叙述 FIR 滤波器设计之前，先讨论线性相位特性的含义。

7.4.1　线性相位

线性相位是指不同频率的正余弦信号在通过一个系统或滤波器之后发生的相移是与信号的频率成正比的。为了说明线性相位的优点，我们来看图 7-11 中的这个例

子。图中画成了连续时域的波形，但应该看作离散时域的情况。



(a) 输入信号 (b) 非线性相位输出 (c) 线性相位输出

图 7-11 线性相位与非线性相位的输出波形比较

图 7-11 中的输入信号由两个余弦分量组成，它们的频率分别为 100 Hz 和 200 Hz，如图 7-11a 所示。又假设这两个频率分量都在滤波器的通带之内，所以它们经过滤波器后的幅度都没有变化，但相位是一定有变化的。现在假设这两个分量的相位都被延迟了 90°(这就不是线性相位)。延迟 90°就是延迟了两个余弦分量各自周期的 1/4。所以，频率等于 100 Hz 的分量被延迟了 2.5 ms，而频率等于 200 Hz 的分量被延迟了 1.25 ms。由于通过滤波器的延迟时间不同，所以叠加后的输出信号的形状一定与原来的输入信号不同，这就是图 7-11b 的情况。

现在假定相位延迟与频率成正比，比如，100 Hz 和 200 Hz 这两个分量的相位延迟依次为 90°和 180°(这就是线性相位)，如图 7-11c 上面的两个波形所示。因此，这两个分量通过滤波器的时间延迟都等于 2.5 ms，它们叠加后的输出信号就与输入信号完全一样，这就是图 7-11c 下面的波形，虽然在时间上有一些延迟。因此，线性相位的优点是保证一个由多个频率分量组成的信号在通过滤波器之后，信号的波形不发生改变。

那么，FIR 滤波器是如何保证线性相位的呢？这很简单，只要滤波器的系统冲击响应是对称的。这个对称性可以是偶对称，也可以是奇对称。

在讨论冲击响应的偶对称和奇对称之前，我们先来说明 FIR 滤波器冲击响应的另一个需要考虑的参数：冲击响应样点数的奇偶性。奇数样点和偶数样点的差别示于图 7-12 中，而图中的冲击响应又是偶对称的。对于奇对称的冲击响应，也存在奇数样点和偶数样点两种情况。

图 7-12a 中的冲击响应共有 7 个样点，属于奇数样点冲击响应的情况。它的特点是冲击响应的中心是一个样点，比如图 7-12a 中冲击响应的第 4 个样点。其结果是，这样的滤波器的延迟等于整数个样点时间。比如，图 7-12a 中所示的 FIR 滤波器的延迟为 3 个样点时间。

注意：线性相移 FIR 滤波器的时间延迟为从冲击响应的第一个样点到中心样点

(或位置)的时间长度。

图 7-12b 为偶数样点冲击响应的情况。冲击响应的对称中心位于两个样点之间。所以,这种滤波器的延迟不是整数个样点时间,而是包含了半个样点时间的延迟,比如图 7-12b 中的延迟为 3.5 个样点时间。除了延迟时间之外,奇数样点和偶数样点滤波器在频率响应方面没有太大的差别。在下面的讨论中,我们使用奇数样点的冲击响应。

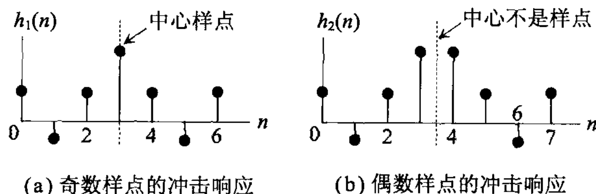


图 7-12　FIR 滤波器的冲击响应长度分为奇数样点和偶数样点两种

我们先举一个偶对称冲击响应的例子。比如,有一个 FIR 滤波器的冲击响应只有 3 个样点:$h(0)=0.5$,$h(1)=1.0$,$h(2)=0.5$。这个冲击响应中的 $h(0)$ 和 $h(2)$ 是关于 $h(1)$ 偶对称的,所以,这个冲击响应是偶对称的。

这个 FIR 滤波器的传递函数可以写为:

$$H(z)=0.5+z^{-1}+0.5z^{-2} \tag{7-33}$$

根据式(5-29),这个滤波器的频率响应为:

$$H(e^{j\omega T})=0.5+e^{-j\omega T}+0.5e^{-j2\omega T} \tag{7-34}$$

对上式右边提出公因子 $e^{-j\omega T}$,再利用欧拉恒等式把第一项与第三项合并成一个余弦函数,得到:

$$H(e^{j\omega T})=e^{-j\omega T}(1+\cos\omega T) \tag{7-35}$$

从上式可知,滤波器的幅频响应等于 $(1+\cos\omega T)$,相频响应等于 $-\omega T$。因为 T 为采样周期,是一个常数,所以相移就与频率 ω 成正比。因此,这个滤波器有线性相位的特性。这个简单滤波器的幅度和相位响应示于图 7-13 中。从图中可知,这个滤波器有低通效应。

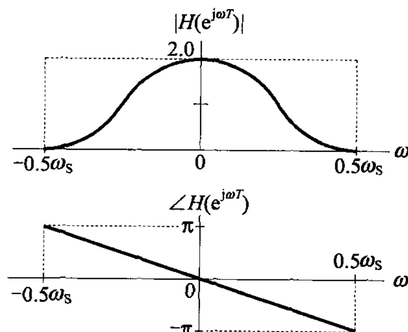


图 7-13　偶对称冲击响应 FIR 滤波器的频率响应

对于奇对称冲击响应的 FIR 滤波器,可以用相同的方法来验证其线性相位。比如,有一个滤波器的冲击响应为:

$$\begin{cases} h(0)=0.5 \\ h(1)=0 \\ h(2)=-0.5 \end{cases} \tag{7-36}$$

这个冲击响应是关于 $h(1)$ 奇对称的。它与上面偶对称的样点很相近,只是使

$h(1)=0$(奇对称所必需的),然后把 $h(2)$变成相反数。

这个滤波器的频率响应可以写为:

$$H(e^{j\omega T})=0.5-0.5e^{-j2\omega T} \tag{7-37}$$

对上式右边提出公因子 $e^{-j\omega T}$,并使用欧拉恒等变换把两项合并成一个正弦函数之后,得到:

$$H(e^{j\omega T})=e^{-j\omega T}e^{j\pi/2}\sin\omega T \tag{7-38}$$

这个滤波器的频率响应示于图 7-14 中。它的幅度响应等于$|\sin\omega T|$,而相位响应由两部分组成:$-\omega T$ 为线性相移部分,$\pi/2$ 为恒定相移部分。此外,当 $\omega<0$ 时,幅度响应中的 $\sin\omega T$ 会给出一个负号。把这个负号归入 $\pi/2$ 的恒定相移部分之后,使它在$\omega<0$时变为$-\pi/2$,如图 7-14 所示。这样,恒定相移部分对正负频率分别有 $\pi/2$ 和$-\pi/2$ 的相移。所以,奇对称冲击响应的数字滤波器除了线性相位特性之外,还可以使输出信号产生一个固定的 $\pi/2$ 相移。如果滤波器的冲击响应 $h(n)$选择得恰当,可以使这种滤波器变为一种能够产生固定 $\pi/2$ 相移的全通滤波器。这样的滤波器在通信中叫做希尔伯特变换,经常用来产生一对正交的正余弦信号。本章讨论的是用于滤波操作的滤波器设计,所以我们在下面只讨论偶对称冲击响应滤波器的分析与设计。

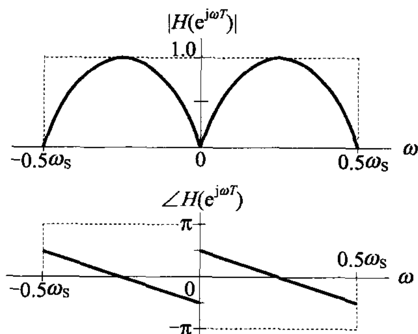


图 7-14 奇对称冲击响应 FIR 滤波器的频率响应

7.4.2 窗函数法

窗函数法是最常用的 FIR 滤波器设计方法。这种设计方法可以分为两个步骤。首先计算出具有理想幅频响应的 FIR 滤波器的单位冲击响应。这种理想 FIR 滤波器有无限长的冲击响应(这当然不是 FIR 滤波器),所以就需要第二步:利用窗函数把理想 FIR 滤波器转变成实用的 FIR 滤波器。这种设计方法也因此被叫做窗函数法。

1. 理想滤波器

理想滤波器是窗函数法 FIR 滤波器设计的起点。我们在这里只讨论低通滤波器的情况。高通、带通等其他滤波器的设计是与低通滤波器完全一样的。因为在下面可以看到,无论是什么样的理想滤波器,窗函数设计方法的第一步都是把滤波器的幅频特性展开为傅里叶级数。

理想低通滤波器的幅频响应具有陡直的通带边缘,没有过渡带,如图 7-15 所示。图中,ω_C为低通截止频率,ω_S为采样频率,下标 d 表示“理想的”。因为数字滤波器的幅频响应是以 ω_S为“周期”的周期函数,所以可以展开为傅里叶级数。为了便于说明,我们把通常连续时域中的周期信号画在图 7-16 中,并首先把时域信号 $x(t)$展开为傅里叶级数。

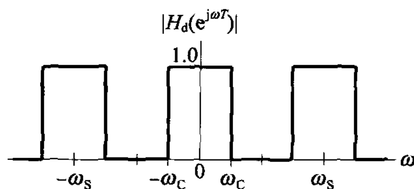


图 7-15　理想低通滤波器的幅频特性

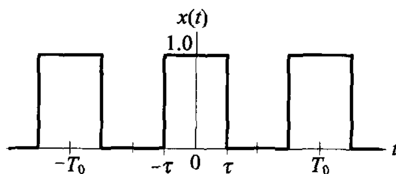


图 7-16　连续时域中的一个周期信号

图 7-16 中的周期信号 $x(t)$的幅度等于 1，周期等于 T_0，矩形波宽度等于 2τ，并以纵坐标为对称轴。由于图 7-16 中的 $x(t)$是偶函数(图 7-15 中的理想滤波器的幅频特性也是偶函数)，所以它的傅里叶级数展开式中一定没有正弦项。因此，$x(t)$的傅里叶级数展开式可以写为：

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n \cos(n\omega_0 t) \tag{7-39}$$

其中，$\omega_0 = 2\pi/T_0$；α_0为 $x(t)$的直流分量，$2\alpha_n$为 $x(t)$的基频和高次谐波分量的系数。

为了方便后面的计算，我们把式(7-39)中余弦项的系数写为 $2\alpha_n$。因此，这里的 α_n就等于式(1-22)中 a_n的一半。在后面计算系数 α_n时，要从 1.4 节的相应的计算公式中减半。

利用 1.4 节中的式(1-27)，可得式(7-39)中的直流分量 α_0为：

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,\mathrm{d}t \tag{7-40}$$

由图 7-16 可知，上式中的积分上下限应该等于 τ 和 $-\tau$。因此，α_0为：

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau}^{\tau} (1.0)\,\mathrm{d}t = \frac{2\tau}{T_0} \tag{7-41}$$

利用 1.4 节中的式(1-26)，式(7-39)中的基频与各次谐波分量的系数 α_n(注意 α_n要减半)为：

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{7-42}$$

同样，上式中的积分上下限应该等于 τ 和 $-\tau$。所以，α_n为：

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau}^{\tau} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\omega_0 T_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{2\tau}{T_0}\,\frac{\sin(n\omega_0\tau)}{n\omega_0\tau} \tag{7-43}$$

上式最右边包含正弦函数的那个分式是一个 sinc 函数，其中的 n 是从 1 开始递增的。

现在可以把图 7-15 中的理想滤波器的幅频响应展开为傅里叶级数。展开的方法是把图 7-15 和图 7-16 中的相应参数进行比对。比对之后可以确定，图 7-15 中的 ω_S对应图 7-16 中的 T_0，图 7-15 中的ω_C对应图 7-16 中的 τ。所以，参照式(7-41)，理想滤波器的幅频响应展开式中的直流分量应该是：

$$a_{d0} = \frac{2\omega_C}{\omega_S} \tag{7-44}$$

在计算基频与高次谐波分量时，我们应该知道，式(7-43)中的 ω_0为图 7-16 中的

$x(t)$的基频，它等于 $2\pi/T_0$，所以，应该对应图 7-15 中的 $2\pi/\omega_S = T$。这样，基频分量与高次谐波分量的系数可参照式(7-43)计算为：

$$a_{dn} = \frac{2\omega_C}{\omega_S} \cdot \frac{\sin(n\omega_C T)}{n\omega_C T} \tag{7-45}$$

在参考了式(7-39)之后，图 7-15 中的理想滤波器的幅频响应可以用 a_{d0} 和 a_{dn} 展开为：

$$|H_d(e^{j\omega T})| = a_{d0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{dn}\cos(n\omega T)$$

在利用欧拉恒等式把余弦函数变为复指数函数之后，上式变为：

$$|H_d(e^{j\omega T})| = a_{d0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{dn}(e^{jn\omega T} + e^{-jn\omega T}) \tag{7-46}$$

显然，式(7-46)右边的两个指数项可以看作 z^n 和 z^{-n} 在单位圆上的求值，因此可将其改写为：

$$|H_d(e^{j\omega T})| = a_{d0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{dn}(z^n + z^{-n})\Big|_{z=e^{j\omega T}} \tag{7-47}$$

式(7-47)中，因为冲击响应是关于 a_{d0} 偶对称的，比如，z^2 与 z^{-2} 的系数都是 a_{d2}，所以，这样的滤波器的相位延迟一定为零。

注意：这个滤波器现在还不是因果性的。关于“零相位延迟”可以参阅式(7-33)。在那里，因为把 $h(0)$ 作为冲击响应的起始样点，所以就有 1 个样点时间的延迟，表示为式(7-35)中的 $\exp(-j\omega T)$ 项。如果当初把式(7-33)中的 $h(1)$ 作为冲击响应的起始样点，那么，在式(7-35)中就不会出现 $\exp(-j\omega T)$ 这一项，因而，频率响应中的相移部分就全等于零。但是，那样的滤波器就不是因果性的。而现在的等式(7-47)就是这样的一个非因果性的传递函数。

由于相位延迟等于零，这个滤波器的幅频响应就等于它的频率响应。因此，式(7-47)左边的取模运算可以去除，变为：

$$H_d(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = a_{d0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{dn}(z^n + z^{-n})\Big|_{z=e^{j\omega T}} \tag{7-48}$$

对式(7-48)左右两边比较之后，就得到理想滤波器的传递函数：

$$H_d(z) = a_{d0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{dn}(z^n + z^{-n}) \tag{7-49}$$

式(7-49)可以写成比较容易观察的形式：

$$H_d(z) = \cdots + a_{d3}z^3 + a_{d2}z^2 + a_{d1}z + a_{d0} + a_{d1}z^{-1} + a_{d2}z^{-2} + a_{d3}z^{-3} + \cdots \tag{7-50}$$

由式(7-50)，我们可以容易地得到这个理想 FIR 滤波器的无限长的冲击响应序列 $h_d(n) = \{\cdots, a_{d1}, a_{d0}, a_{d1}, \cdots\}$。显然，$h_d(n)$是非因果性的。我们把这个冲击响应序列的主要部分(即 a_{d0} 两侧的那些样点)画在了图 7-17 中。因为式(7-45)是一个 sinc 函数，所以，图 7-17 中的冲击序列样点呈现像图 1-8 那样的 sinc 函数形状。因为式(7-45)中包含了理想滤波器的截止频率 ω_C，所以，不同 ω_C 的理想滤波器的冲击序列就有不同的幅度和不同的起伏频度。

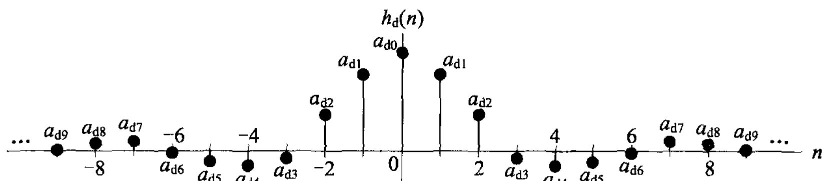


图 7-17　由理想滤波器求得的 FIR 滤波器有无限长的冲击响应

由图 7-17 可以看出，理想数字滤波器的冲击响应 $h_d(n)$，即传递函数(7-50)中的系数，是关于 a_{d0} 偶对称的。这是我们需要的。但同时也发现两个问题。一个是冲击响应无限长，另一个是非因果性。这两个问题将在下一节讨论。

2. 窗函数与延迟操作

解决上面出现的两个问题的方法是窗函数和延迟操作。首先我们对无限长的冲击响应截取 a_{d0} 两侧的主要部分，抛弃其余部分。比如，在 a_{d0} 两侧各截取 M 项。这样就把整个冲击响应的长度减少到了$(2M+1)$个样点。然后，再用恰当的窗函数对这$(2M+1)$个样点值进行修改，以减少截取操作的负面效应。

这种截取与修改系数的操作，实际上等同于用一个窗函数去乘这个无限长的冲击响应。我们知道，两个时域信号的乘积的频谱等于这两个时域信号的频谱的卷积。这就是说，窗函数的频率特性直接影响到截取后滤波器的频率特性。所以，窗函数的选择是很重要的。简单截取的做法等同于使用矩形窗去截取，而矩形窗的边缘是陡直的，所以它对滤波器频谱的影响会非常大。我们一般选择那些两端缓慢变小的窗函数，其中最常用的有汉宁窗、汉明窗和布莱克曼窗等。这些窗函数的形状和表达式可参阅第 9 章的图 9-11、式(9-56)、式(9-60)、式(9-67)和式(9-70)。我们将在第 9 章比较详细地描述这些窗函数。

在施加恰当的窗函数以完成截取之后，式(7-49)和式(7-50)中的理想滤波器的传递函数就只包含下面的$(2M+1)$项：

$$H_t(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{M} a_n(z^n + z^{-n}) \tag{7-51}$$

现在，再把这个截取后的传递函数变为因果性的。这就是用 z^{-M} 去乘传递函数中的每一项，使传递函数的每一项都延迟 M 个样点时间。这样之后，就得到我们想要的 FIR 滤波器的传递函数：

$$H(z) = a_0 z^{-M} + \sum_{n=1}^{M} a_n(z^n + z^{-n})z^{-M} \tag{7-52}$$

这个 FIR 滤波器也可以写成比较容易观察的形式：

$$H(z) = a_M + a_{M-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-M+1} + a_0 z^{-M} + a_1 z^{-M-1} + \cdots + a_M z^{-2M} \tag{7-53}$$

这样就完成了偶对称冲击响应 FIR 滤波器的设计。

现在来归纳一下窗函数法 FIR 滤波器的设计过程。首先根据所需的数字滤波器的幅频响应，计算出像式(7-49)那样的 FIR 滤波器的传递函数，但只需计算中间的

(2M+1)个样点。因为冲击响应是偶对称的，所以总共只有(M+1)个不同的冲击响应样点 a_{d0} 到 a_{dM}。其中 a_{d0} 的计算使用式(7-44)，a_{d1} 到 a_{dM} 的计算使用式(7-45)。然后，对这(2M+1)个样点施加恰当的窗函数，再乘以 z^{-M}，使传递函数中的每一项都延迟 M 个样点周期。这样，我们就得到一个像式(7-53)那样的由(2M+1)项组成的传递函数。如果这个 FIR 滤波器的幅频响应达不到设计要求，就应该考虑增加 M，然后重复上面的步骤，直到满意为止。至于滤波器系数 a_{d0} 到 a_{dM} 的计算，即式(7-44)和式(7-45)，看起来有些复杂。但是，当注意到除 n 之外其他参数都是常数时，计算起来应当不会很困难。特别是，其中的 $\omega_c T$ 只要事先计算一次。而且，$\omega_c T$ 实际上是归一化的截止频率，它等于截止频率与采样频率之比的 2π 倍，是一个很容易理解的常数。现在来看一个例子也许是最好的说明。

例 7-2 用窗函数法设计一个 FIR 滤波器，要求滤波器的频率响应如图 7-15 所示，并且 $f_c = f_S/4$。对理想滤波器的单位冲击响应截取 11 个样点。

因为所设计的滤波器的通带为折叠频率的一半，所以这种滤波器叫做半带滤波器。先按照式(7-44)计算出 a_{d0}：

$$a_{d0} = \frac{2\omega_C}{\omega_S} = \frac{2\times 0.25\omega_S}{\omega_S} = 0.5 \tag{7-54}$$

再按照式(7-45)计算 a_{dn}：

$$a_{dn} = \frac{2\omega_C}{\omega_S}\frac{\sin(n\omega_C T)}{n\omega_C T} = 0.5\times\frac{\sin(0.5n\pi)}{0.5n\pi} = 0.5\text{sinc}(0.5n) \quad n=1,2,3,4,5 \tag{7-55}$$

利用第 1 章的表 1-1 可以容易地得到前 5 个 a_{dn} 的数值：$a_{d1}=0.318$、$a_{d2}=0$、$a_{d3}=-0.106$、$a_{d4}=0$、$a_{d5}=0.064$。然后，选择一个窗函数，比如汉宁窗。汉宁窗的计算公式可参照式(9-60)，而且，窗函数的样点总数也取 11 个样点。这样，我们可以计算出汉宁窗 11 个样点中的中间样点值等于 1，两边对称的 5 个样点值分别为{0.905, 0.655, 0.345, 0.095, 0.0}。因为汉宁窗的两个端点上的样点都为零，所以，窗函数实际上只有 9 个样点。又因为滤波器系数中的 a_{d2} 和 a_{d4} 为零(半带滤波器的特点是它的一半系数都为零)，最后就只剩下 5 个样点。这个 FIR 滤波器的 5 个系数为：$h(0)=-0.037$、$h(2)=0.288$、$h(3)=0.5$、$h(4)=0.288$、$h(6)=-0.037$。其中的 $h(1)$ 和 $h(5)$ 因半带滤波器而等于零，所以没有计算在内。我们用表 7-2 列出这 5 个冲击响应样点的计算过程。

表 7-2

序号 n	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
a_{d0} 和 a_{dn}	0.064	0	−0.106	0	0.318	0.5	0.318	0	−0.106	0	0.064
汉宁窗	0	0.095	0.345	0.655	0.905	1	0.905	0.655	0.345	0.095	0
$h(n+3)$	0	0	−0.037	0	0.288	0.5	0.288	0	−0.037	0	0

表 7-2 中最下面一行使用了 $n+3$ 而不是 n，只是为了与表中最上面一行的序号 n 对齐，而最后得到的 FIR 滤波器的冲击响应 $h(n+3)$ 是从表 7-2 中的 $n=-3$ 开始的。

此外，我们还用图 7-18 画出了与表 7-2 对应的 FIR 滤波器冲击响应序列的计算过程。图 7-18a 为从理想数字滤波器冲击响应序列 $h_d(n)$ 中截取的 11 个样点。图 7-18b 为汉宁窗 $w_{hann}(n)$ 的 11 个样点。用 $w_{hann}(n)$ 去乘 $h_d(n)$ 就得到图 7-18c 中的 FIR 滤波器的设计结果 $h(n)$。这是一

个 5 抽头的 FIR 滤波器。

我们可以根据 $h(n)$ 写出设计完成的 FIR 滤波器的传递函数：

$$H(z)=-0.037+0.288z^{-2}+0.5z^{-3}+0.288z^{-4}-0.037z^{-6} \tag{7-56}$$

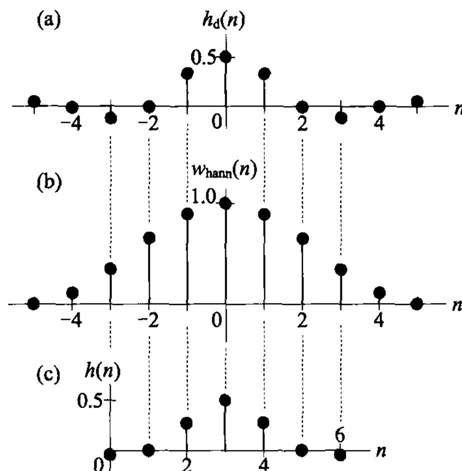


图 7-18　窗函数法 FIR 滤波器冲击序列的计算过程

根据这个传递函数画出的滤波器实现框图见图 7-19。

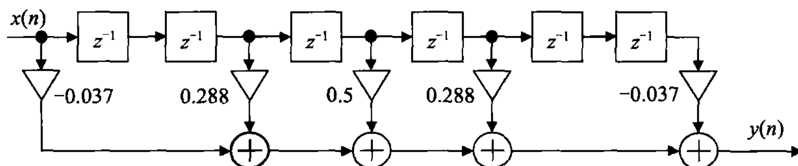


图 7-19　设计完成的 FIR 滤波器的实现框图

最后，我们对设计完成的这个 FIR 滤波器进行验证，主要是核对它的幅频响应。为此，对式(7-56)在单位圆上求值，得到滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\Omega})=-0.037+0.288e^{-j2\Omega}+0.5e^{-j3\Omega}+0.288e^{-j4\Omega}-0.037e^{-j6\Omega} \tag{7-57}$$

对上式提出公因子 $\exp(j3\Omega)$，并把复指数合并为余弦函数，上式变为：

$$H(e^{j\Omega})=e^{-j3\Omega}[0.5+0.576\cos(\Omega)-0.074\cos(3\Omega)] \tag{7-58}$$

所以，这个 FIR 滤波器的幅频响应是：

$$|H(e^{j\Omega})|=0.5+0.576\cos(\Omega)-0.074\cos(3\Omega) \tag{7-59}$$

我们用逐点计算的方法画出这个滤波器的幅频响应曲线，如图 7-20 所示。图中的上图是式(7-59)中的一个常数项和两个余弦项所表示的幅频曲线。把这三项叠加起来就构成下图中的幅频响应曲线。从图中可以看出，这个半带滤波器的截止频率正好是折叠频率的一半。因而验证了这个 FIR 滤波器设计的正确性。但从图 7-20 来看，过渡带还不够陡峭，这是因为从理想滤波器冲击响应中截取的项数还不够多。如果想要更好的幅频响应，就可以截取更多的冲击响应项数，比如 15 项。

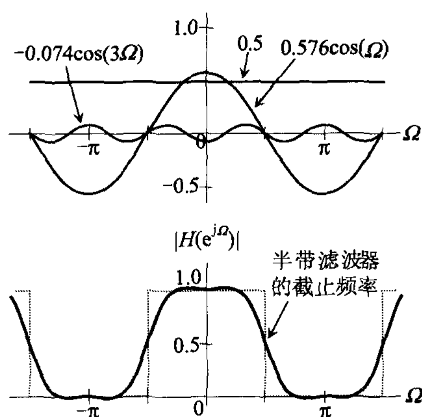


图 7-20 用窗函数法设计的 FIR 滤波器的幅频响应

7.5 用 MATLAB 设计数字滤波器

现在的滤波器设计大多借助计算机化的设计工具，而且有许多这样的设计工具，MATLAB 就是其中之一。

MATLAB 是一个覆盖许多技术领域的设计工具。我们在这里只是简要地叙述如何利用 MATLAB 来获取所需要的数字滤波器的系数。一旦有了数字滤波器的系数，就不难画出滤波器的实现框图，并写出相应的滤波器计算程序。但是，在使用 MATLAB 进行设计之前，必须确定所需的滤波器特性；在 MATLAB 完成设计并给出滤波器系数之后，必须验证这些滤波器系数。这就是说，在使用 MATLAB 进行设计的之前和之后的这两项任务是滤波器设计正确与否的关键所在，而这两项任务都是与数字滤波器的设计原理密切相关的。所以，正确理解数字滤波器的原理是利用 MATLAB 这类设计工具的前提。下面将按照实际使用 MATLAB 的步骤来叙述数字滤波器的设计过程。

7.5.1 进入滤波器设计与分析窗口

从 MATLAB 的主页开始，选择[Start]→[Toolboxes]→[Filter Design]→[Filter Design & Analysis Tool(fdatool)]，进入 Filter Design & Analysis Tool(fdatool)设计窗口。

7.5.2 完成滤波器设计

在 Filter Design & Analysis Tool(fdatool)设计窗口中，可以选择下列设计内容。

□ Response Type：可以选择 lowpass、highpass 等。

□ Design Method：可以选择 IIR 或 FIR。在 IIR 中，可以指定 Butterworth、Cheby-

shev I或II等。在FIR中可以指定等纹波、窗函数等。

- ❑ Filter Order：可以指定滤波器的阶数，或者让MATLAB为你确定最低的阶数。当选择最低阶数时，MATLAB会根据Magnitude Specifications来确定这个最低阶数。
- ❑ Frequency Specifications：可以选择频率单位、采样频率、通带频率、阻带频率等。
- ❑ Magnitude Specifications：可以确定通带增益、阻带衰减等。
- ❑ Option：（可以不选）。

当前面5项选定之后，就可以命令MATLAB开始滤波器设计。MATLAB以显示Magnitude Response (dB)告知用户设计已经完成。

7.5.3 核对滤波器特性

这时你仍在Filter Design & Analysis Tool(fdatool)设计窗口中。可以单击[Analysis]，从中选择希望核对的滤波器特性。比如，[Magnitude Response]、[Phase Response]、[Impulse Response]、[Zero/Pole Plot]、[Filter Coefficients]等。

7.5.4 把滤波器系数存入文件

这时你仍在Filter Design & Analysis Tool(fdatool)设计窗口中。可以选择[File]→[Export]。在出现Export窗口之后，必须完成下列输入才能把设计结果保存在文件中。

- ❑ Export To：选择Coefficient File(ASCII)。
- ❑ Options：选择Decimal、Hexidecimal或Binary。

然后，单击Export，把滤波器系数存入指定的文件内。如果把文件类型选择为[.doc]或[.txt]，还可以使滤波器系数文件直接与C代码相连。

至此，使用MATLAB的滤波器设计已经完成。

小结

- ❑ 回顾了模拟滤波器的主要特性和设计方法。
- ❑ 在IIR滤波器设计中，叙述了单位冲击响应不变性和双线性变换两种设计方法。其中的双线性变换由于不存在频率混叠而得到较多的应用。
- ❑ 在FIR滤波器的设计中，叙述了窗函数法的设计方法。由于理想的数字滤波器有无限长的冲击响应，所以必须用窗函数把冲击响应截取成有限的长度，然后再把它变成因果性的。
- ❑ FIR滤波器还有其他一些设计方法，其中最常用的也许是等纹波滤波器，也叫“最优”滤波器。但有了窗函数法的设计基础之后，就不难理解其他FIR滤波器的设计方法。

- □最后叙述了用MATLAB设计数字滤波器的方法。这是一种方便、快捷的设计方法，但滤波器的设计指标必须由设计者确定，设计完成的滤波器特性也必须由设计者验证。而更重要的是如何在系统环境下确定所需的滤波特性。这些都要求我们对数字滤波器的特性有很好的理解。

习题

7.1 对于下面的传递函数，分别画出直接形式Ⅰ和直接形式Ⅱ的实现框图。

$$H(z)=\frac{1-0.2z^{-1}+0.5z^{-2}+0.3z^{-3}}{1-0.8z^{-1}+0.5z^{-2}+0.7z^{-3}}$$

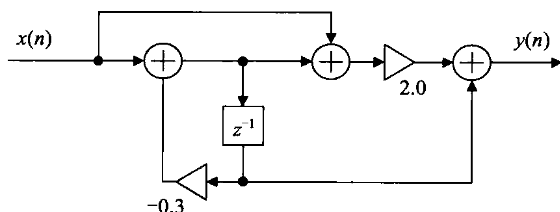
7.2 对于下面的传递函数，画出恰当的实现框图。

$$H(z)=\frac{3}{1-z^{-1}}+\frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}+z^{-1}$$

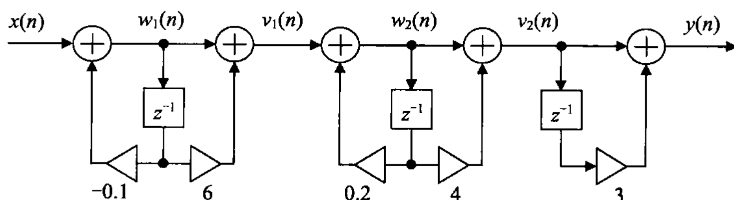
7.3 用一阶环节画出下面传递函数的串联形式和并联形式的实现框图。

$$H(z)=\frac{0.7(1-z^{-1})}{1-0.3z^{-1}-0.4z^{-2}}$$

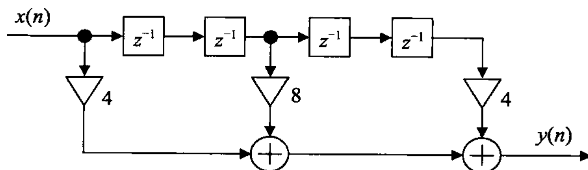
7.4 试确定下面框图所表示的系统传递函数，并画出直接形式Ⅱ的实现框图。



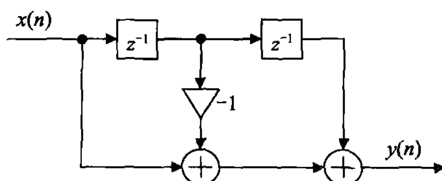
7.5 试确定下面框图所对应的系统差分方程和传递函数。



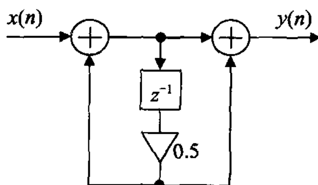
7.6 试确定下面离散时域系统的差分方程、传递函数和单位冲击响应。



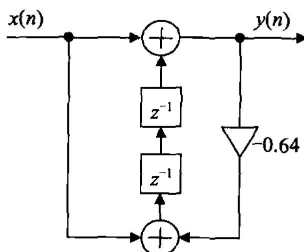
7.7 画出下面离散时域系统的幅频与相频响应。



7.8　找出下面滤波器实现框图所对应的系统传递函数 $H(z)$和冲击响应 $h(n)$。



7.9　画出下面实现框图所对应的离散系统的零极点图，以及在直流和0.25采样频率处的幅频响应。



7.10　一个线性相移FIR滤波器的冲击响应为奇对称并有奇数个样点，证明它必有一个零点在 $z=-1$，并设法从时域来解释这个零点。

7.11　一个一阶全通滤波器的传递函数为：

$$H(z)=\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}},\quad |a|<1$$

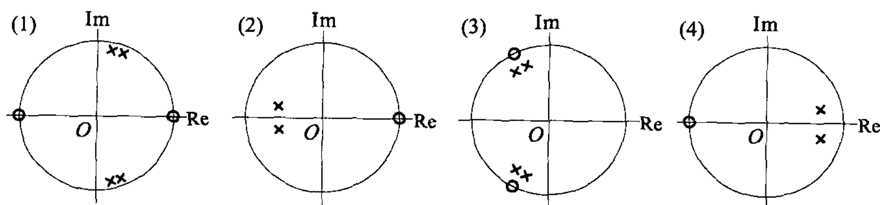
(1) 画出这个滤波器的直接形式Ⅰ和直接形式Ⅱ的计算框图。

(2) 画出当 $a=0.98$ 时的滤波器的相频响应曲线。

(3) 当系数 a 用不同位数的定点二进制表示时，a 值的波动性会使幅频响应发生波动吗？

7.12　用双线性变换设计一个截止频率等于100 Hz的一阶巴特沃斯数字低通滤波器，其中的采样频率等于1 kHz。

7.13　试判别下列图中的零极点所对应的滤波器是低通、高通、带通或带阻。



第 8 章 插值与抽取

在有些离散时域系统中，数字信号的采样率要求随处理过程而变化。比如在音频范围内，有许多不同的采样率标准，包括 48kHz、44.1kHz、32kHz、22.05 kHz、8 kHz等。我们有时就要求一个音频信号在这些不同的采样率之间转换。一个包含了几种不同采样率的离散系统，叫做*多速率系统*。

改变离散时域信号采样率的方法有两种：插值和抽取。提高采样率的过程叫做*插值*，把采样率提高到原来采样率 L 倍的操作，叫做 $1:L$ 插值。降低采样率的过程叫做*抽取*，把采样率降低到原来采样率的 $1/K$ 的操作，叫做 $K:1$ 抽取。结合使用插值和抽取的方法，就可以任意改变离散数字信号的采样率，只要采样率的改变量可以表示为有理因式 L/K。

下面将分别叙述插值、抽取以及结合使用插值与抽取的操作过程，然后讨论再采样操作。最后将讨论使用 DAC(数模转换器)把离散时域信号带回到连续时域时所遇到的一些问题。

8.1 插值

数字信号的插值是与一般的数值计算中的插值不同的。在数值计算中，插值常常是对几个孤立的数值点找出最合适的多项式。在数字信号处理中，首先是不能改变信号原来的谱形；其次是采样率提高后的信号必须也是限带的。这就是说，在原来信号的通带以外不允许存在任何其他的频率成分。能够满足这两个要求的插值操作是*插零和低通滤波*。

数字信号的插零就是在原来的数字样点之间等间距地补零，如图 8-1 所示。图中完成的是 $L=3$ 的插值。

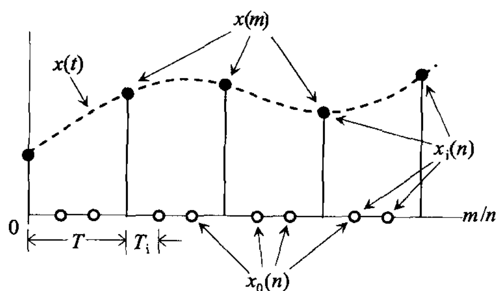


图 8-1　数字信号的 1∶3 插值操作

图 8-1 中的虚线 $x(t)$ 表示原始的模拟信号，$x(m)$ 是原来的信号样点，$x_0(n)$ 为补零的样点。原来的信号样点 $x(m)$ 与

补零的样点 $x_0(n)$ 合起来组成了插零之后的信号样点，图 8-1 中表示为 $x_i(n)$，下标 i 表示插零。我们把原来信号的采样周期叫做 T，所以原来的采样率 $\omega_S=2\pi/T$；插值后的采样周期叫做 T_i，所以插值后的采样率 $\omega_{Si}=2\pi/T_i$。因此，当 $L=3$ 时，ω_{Si} 是 ω_S 的 3 倍。

我们要求，插零后的信号样点 $x_i(n)$，在经过低通滤波之后，完全等于当初用 3 倍采样率对模拟信号 $x(t)$ 进行采样的结果。形象地说，就是把图 8-1 中所有用圆圈表示的零样点 $x_0(n)$ 垂直向上移动到虚线 $x(t)$ 上。

首先证明采用这种插零的方法不会改变原来信号的频谱。为此，我们写出原来数字信号 $x(m)$ 的 z 变换：

$$X(z)=\sum_{m=0}^{\infty}x(m)z^{-m} \tag{8-1}$$

假设 $L=3$。所以，在完成插零之后，在原来 $x(m)$ 的每 2 个样点之间增加了 2 个零样点。但由于采样率的不同，插零后的单位延迟的延迟时间只有原来采样率下单位延迟的 1/3。用 z_i^{-1} 表示插零后的单位延迟，显然，$z_i^{-3}=z^{-1}$。

现在可以写出新的采样率下的信号 $x_i(n)$ 的 z 变换：

$$X_i(z_i)=\sum_{n=0}^{\infty}x_i(n)z_i^{-n} \tag{8-2}$$

因为 $x_i(n)$ 每 3 个样点中 2 个为零，所以，那些零样点的乘积项完全可以从式(8-2)中删除。这样，式(8-2)可以有下面的演算过程：

$$\begin{aligned}X_i(z_i)&=x_i(0)+x_i(1)z_i^{-1}+x_i(2)z_i^{-2}+x_i(3)z_i^{-3}+x_i(4)z_i^{-4}+\cdots\\&=x_i(0)+x_i(3)z_i^{-3}+x_i(6)z_i^{-6}+x_i(9)z_i^{-9}+\cdots\end{aligned} \tag{8-3}$$

显然，上式中的 $x_i(3n)$ 等于插零之前的 $x(m)$，而且，$z_i^{-3n}=z^{-n}$，所以，式(8-3)可以改写为：

$$\begin{aligned}X_i(z_i)&=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}\end{aligned} \tag{8-4}$$

比较式(8-1)和式(8-4)可以看出，插零之前的信号的 z 变换 $X(z)$ 与插零之后的信号的 z 变换 $X_i(z_i)$ 是完全一样的。这就说明了插零不会改变离散信号的频谱。

虽然插零前与插零后的频谱是一样的，但由于采样率的不同，这个相同的频谱有着不同的含义。这可以用图 8-2 来解释。图 8-2 中的频谱是原来信号 $x(m)$ 的幅度谱 $|X(e^{j\omega T})|$，也是补零之后的 $x_i(n)$ 的幅度谱。但对于正确的插值信号来说，它的采样率已经提高到了原来的 3 倍，所以，只有图 8-2 中的 1 和 4 才是真正需要的，而频谱 2 和 3 是不需要的，应该去除。当把 2 和 3 去除之后，我们就得到了所要的幅度谱；而此时，图 8-1中的那些用圆圈表示的 $x_0(n)$ 的零样点就会向上移动到虚线 $x(t)$ 上。

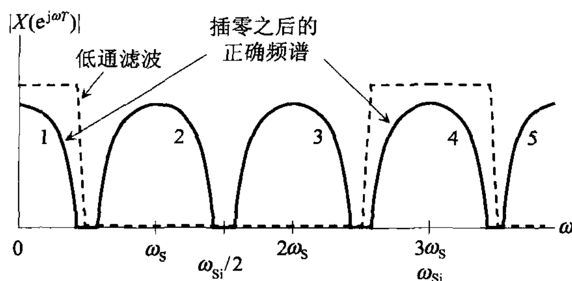
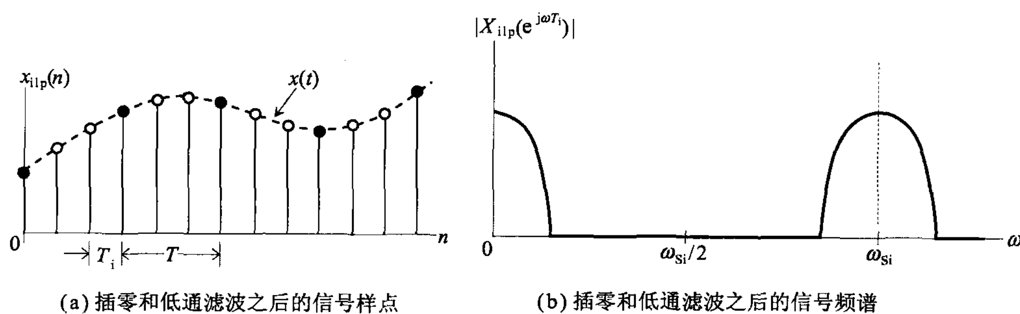


图 8-2 数字信号 $x(m)$在 1∶3 插零之后，频谱没有改变；但频谱 2 和 3 是不需要的



(a) 插零和低通滤波之后的信号样点　　(b) 插零和低通滤波之后的信号频谱

图 8-3 在 1∶3 插零和低通滤波之后的信号及其频谱

去除频谱中 2 和 3 的方法很简单，只要做一次低通滤波就可以了。低通滤波器的截止频率应该等于插零之后的折叠频率的 1/3(如果 $L=3$)，如图 8-2 中的虚线所示。为了使插值和低通滤波之后的信号幅度保持插值之前的幅度，必须使低通滤波器通带内的增益等于插值的倍数，比如，当 $L=3$ 时取增益为 3。如果要求插值之后的信号仍能保持原来的信号形状，就应该使用线性相移的 FIR 滤波器。使用了低通滤波之后的信号及其幅度谱见图 8-3。要求不同的插值率 L 时，其操作过程是与 $L=3$的插值操作相同的。我们把上面叙述的数字信号插值操作的全过程归纳为图 8-4中的流程。

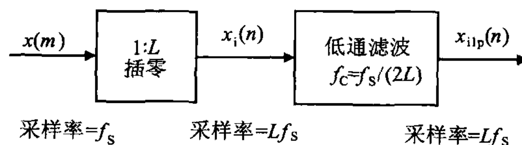


图 8-4 数字信号的插值操作流程，其中，f_S 为插值前的采样率

8.2 抽取

抽取是插值的逆过程。抽取率等于 K 的意思是，原来信号 $x(n)$的每 K 个样点中，丢弃$(K-1)$个样点而只保留一个样点。比如，抽取率 $K=2$，就是每两个样点中保留一个样点，如图 8-5 所示。图中的 $x(m)$为抽取前的信号样点，包括圆点的样点和圆圈的样点。由于原来信号的采样周期为 T，所以，原来的采样率为 $\omega_S=2\pi/T$。图 8-5 中的圆圈样点是被抽取并丢弃的样点。所以，抽取之后的信号只剩下那些用圆点表示的样点，我们把它们叫做 $x_d(n)$，下标 d 表示抽取。抽取之后的采样周期增加到了 $T_d=2T$，所以，抽取之后的采样率是抽取前采样率的 1/2。

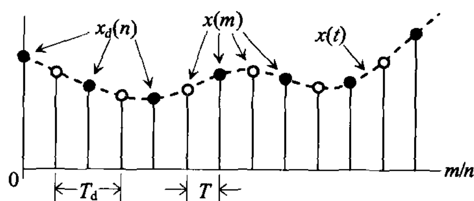


图 8-5 数字信号的 2∶1 抽取操作

我们可以从频域上来解释数字信号的抽取过程。图 8-6 表示了抽取之前信号 $x(m)$的频谱。在对 $x(m)$完成 2∶1 抽取之后，信号的采样率变为原来采样率的一半，这就好比对原先模拟信号 $x(t)$是用 $\omega_S/2$ 来采样的，所以图 8-6 的中心位于 ω_S处的频谱一定被左移到了 $\omega_S/2$ 的频率上，这就变成了图 8-7 中的样子。这时，原来的折叠频率 $\omega_S/2$ 变成了现在的采样频率 ω_{Sd}，而现在的折叠频率则位于原来折叠频率的 1/2 的频率点上，在图 8-7 中被表示为 $\omega_{Sd}/2$。在图 8-7 中，因为原来的信号带宽 ω_B超过了抽取之后的折叠频率 $\omega_{Sd}/2$(也就是图 8-6 中的 $\omega_S/4$)，所以发生了频率混叠。由此可以看出，在对信号做抽取时，如果简单地把信号样点按所需的抽取率进行抽取并丢弃，就有可能发生频率混叠。确切地说，如果被抽取信号的带宽 ω_B超过了抽取之后的折叠频率，就一定发生混叠。反之，如果 ω_B小于抽取之后的折叠频率，就一定不发生混叠。在对数字信号进行抽取时，必须知道这个规则。

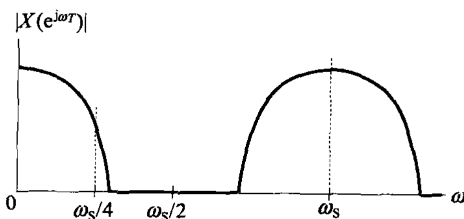


图 8-6 数字信号抽取之前的频谱

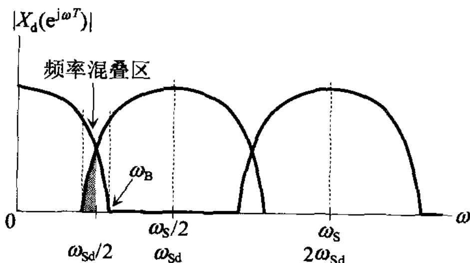


图 8-7 数字信号 2∶1 抽取之后的频谱

如果对信号直接抽取会导致频率混叠，那么，避免混叠的方法就是在抽取之前对信号做低通滤波，把信号中所有超过 $\omega_S/(2K)$的高频成分全部滤除。这可以用图 8-8

来说明，图中抽取率 $K=2$。在抽取之前进行的低通滤波如图中的虚线所示。当 $K=2$ 时，这个低通滤波器的截止频率应该等于原来采样率的 1/4，或者等于原来折叠频率的 1/2。图 8-9 画出了经过低通滤波和抽取之后的信号 $x_{lpd}(n)$ 的幅度谱 $|X_{lpd}(e^{j\omega T})|$。由图 8-9 可知，经过低通和抽取之后的信号 $x_{lpd}(n)$ 的频谱 $|X_{lpd}(e^{j\omega T})|$ 已经不同于原来信号 $x(m)$ 的频谱了，因为 $x(m)$ 频谱中超过 $\omega_{Sd}/2$ 的成分已被低通滤波滤除了。

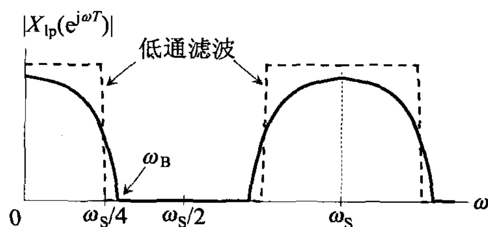


图 8-8 用低通滤波避免因抽取而引起的混叠

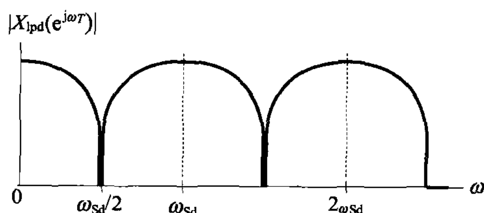


图 8-9 对低通滤波之后的信号 $x_{lp}(n)$ 进行抽取就避免了混叠

我们把数字信号的抽取操作画在图 8-10 中。图 8-10 中下面那条支路的意思是，当被抽取的信号的带宽 ω_B 没有超过 ω_S 的 $1/(2K)$ 的时候，就不需要做低通滤波；比如，对图 8-3b 中的信号进行 3∶1 抽取时。

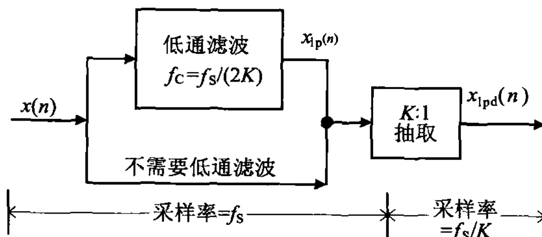


图 8-10 数字信号的抽取操作，f_S 为抽取前的采样率

8.3 插值与抽取的结合使用

现在把插值和抽取结合起来完成一个具体信号的变采样率操作。这个具体信号是 44.1 kHz 采样率的多媒体音频信号，要求把它的采样率降低到 16 kHz。

首先要确定插值率 L 和抽取率 K。经过计算发现，如果要精确地实现上述的变采样率操作，将需要很大的计算量和存储量。在一般应用情况下，可以采用近似的采样率转换。比如，把原先的 44.1 kHz 的采样率近似地看作 44.0 kHz。这样之后，我们可以容易地计算出 $L=4$ 和 $K=11$。根据 L 和 K 的值，可以画出变采样率的操作流程，如图 8-11 所示。图中的 $x(m)$ 为输入信号，$x_{id}(n)$ 为采样率变成 16 kHz 之后的输出信号。变采样率之后的信号 $x_{id}(n)$ 只保留了原来信号的 8 kHz 以下的成分，8 kHz 以上

的成分已经被低通滤波Ⅱ滤除了。其实，低通滤波Ⅰ与Ⅱ这两个滤波器是可以合二为一的，只要把合成的低通滤波器的截止频率设定为 $f_C=8.02$ kHz 就可以了。

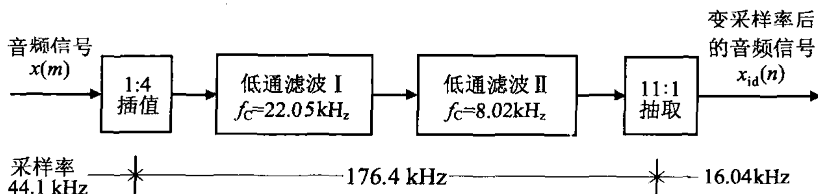


图 8-11　一个多媒体音频信号的变采样率操作流程

8.4　再采样

在本章前面讲到的插值操作中，被插值的样点在时间上是固定的，比如 1∶3 插值。所以，插值操作就是计算出两个原来样点之间三等分时间点上的 2 个新样点。但是，在数字信号处理中，有时需要计算两个样点之间任意一个时间点上的值，比如，图 8-12 中的 $x(t_1)$。图中用虚线画出的 $x(t)$ 是原来的模拟信号，而 $x(-2T)$、$x(-T)$、$x(0)$、$x(T)$、$x(2T)$ 是从 $x(t)$ 上采得的一个离散时域信号 $x(n)$ 中的若干个连续样点，并假设样点 $x(0)$ 的采样时刻为当前的时间点。我们的目的是找出时间点 t_1 上的采样值 $x(t_1)$，而 t_1 是在 0 到 T 区间内的一个任意的时间点。

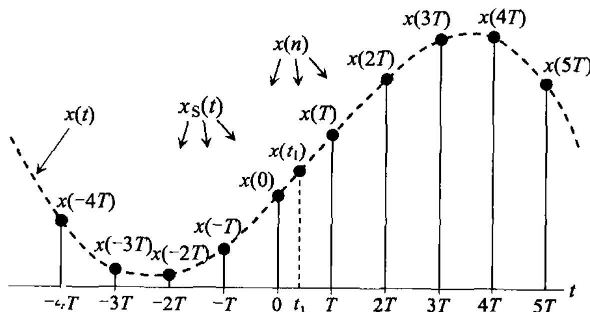


图 8-12　两个样点之间任意时间点上的值 $x(t_1)$

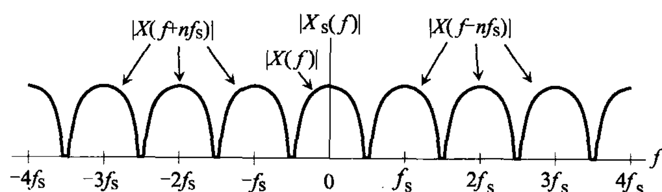
显然，这个任务是不可能用前面叙述的变采样率操作来完成的。解答这个问题的方法只能是，把离散时域信号返回到连续时域中，然后在连续时域中计算出 $x(t)$ 在时间点 t_1 上的值。这个计算过程叫做再采样。

作为再采样的第一步，设法用离散时域信号 $x(n)$ 重构出原来的连续时域信号 $x(t)$。但首先必须把离散时域信号 $x(n)$ 变成连续时域的表达式，这就是表达成式(4-2)的形式。我们在这里重复表达式(4-2)：

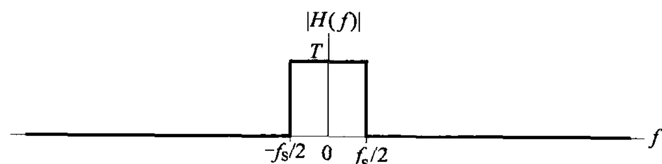
$$x_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) \tag{8-5}$$

其中的已采样信号 $x_S(t)$是由 $x(t)$经采样而得的。

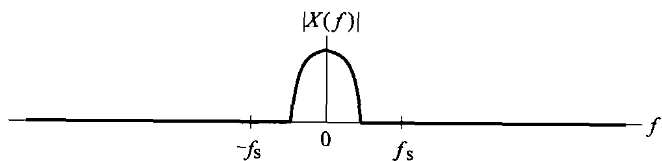
现在假设 $x_S(t)$的频谱为图 8-13a 所示的样子，图中各个相似的频谱是以采样频率 f_S为重复周期的。如果要回到连续时域，就只要保留图 8-13a 的中心位于零频的频谱 $|X(f)|$，而丢弃所有其他的重复频谱。这实际上就是完成连续时域中的一次滤波，而且，这个滤波器应该是一个理想滤波器。它的幅频特性应该如图 8-13b 中所示：通带范围从 $-f_S/2$ 到 $f_S/2$，即截止频率等于 $f_S/2$，而且，通带内的增益为 T[T 为采样周期，但这里仅用作一个比例常数，以使式(8-7)的计算结果比较简洁]。我们还要求滤波器的相位延迟处处为零(理想滤波器是非因果性的，所以是可行的)。



(a) 一个离散时域信号的频谱也可以看作连续时域中的频谱



(b) 理想低通滤波器的幅频响应



(c) 连续时域信号频谱

图 8-13 用理想滤波器重构连续时域信号

这样规定之后，我们就可以从图 8-13b 的理想滤波器的幅频响应计算出它的冲击响应。这就要使用式(1-47)的傅里叶反变换：

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} Te^{j2\pi ft}df \tag{8-6}$$

式(8-6)的积分可计算为：

$$h(t) = \frac{T}{j2\pi t}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} e^{j2\pi ft}d(j2\pi ft) = \frac{T(e^{j\pi f_s t} - e^{j\pi f_s t})}{j2\pi t} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \mathrm{sinc}(t/T) \tag{8-7}$$

式(8-7)就是连续时域理想滤波器的系统冲击响应，是一个 sinc 函数，它的波形如图 8-14所示。当 $t=0$ 时，$h(t)=1$；当 $t=nT$ 时，$h(t)=0$；当 t 的绝对值增加时，$h(t)$越来越小，并趋于零。

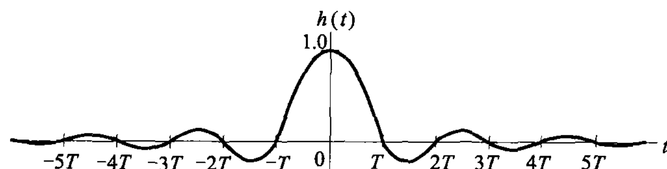


图 8-14　连续时域理想滤波器的系统冲击响应

在得到了连续时域的冲击响应之后，就可以回到图 8-12 和图 8-13，计算出原来的模拟信号 $x(t)$。在图 8-13 中，我们是用理想低通滤波器的频率响应 $|H(f)|$ 去乘 $|X_S(f)|$ 而还原出图 8-13c 中的原来的信号频谱 $|X(f)|$，这也就等于在图 8-12 中用离散时域信号 $x_S(t)$ 通过理想滤波器的冲击响应而恢复出连续时域信号 $x(t)$。但是，两个信号的频域相乘等价于两个信号的时域卷积。所以，我们把恢复出 $x(t)$ 的再采样操作归结为时域中的 $x_S(t)$ 与 $h(t)$ 之间的卷积运算。

我们先把图 8-14 中 $h(t)$ 在时间上进行逆转，然后放到图 8-12 中，并使 $h(t)$ 的纵坐标与时间 t_1 对准。[连续时域中的卷积计算与离散时域中的做法是完全一样的。当用卷积来计算 $x(t_1)$ 的时候，就把 $h(t)$ 的时间零点与 t_1 对齐。]这样，得到图 8-15。

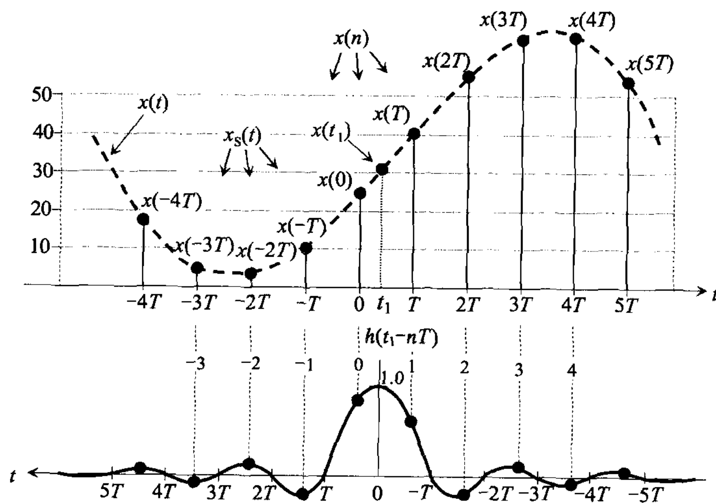


图 8-15　用卷积计算连续时域信号在任意时间点上的值

图 8-15 中上面的离散序列 $x(nT)$ 是从图 8-12 中复制过来的。因为 $h(t)$ 是左右对称的，所以，为做卷积而使 $h(t)$ 在时间上逆转后得到的波形，是与原来 $h(t)$ 的波形一样

的，这就是图 8-15 中下面的那个波形。

现在我们可以按照图 8-15 来计算 $x(t_1)$。从图中可知，卷积中的乘积项只在…、$-2T$、$-T$、0、T、$2T$、…这些时间点上的值不为零，除此之外都为零。所以，卷积计算就从原先的积分变成了累加，具体地说，就是计算 $x(n)$ 与 $h(t)$ 在这些采样时间点上的乘累加和。我们参考式(5-12)的形式写出计算 $x(t_1)$ 的卷积公式：

$$x(t_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t_1 - nT) \tag{8-8}$$

式(8-8)的右边是无数个乘积项的叠加，但随着 n 向正负两侧的伸展，由于 $h(t)$ 的不断衰减，乘积项会越来越小。所以，我们一般截取中心两侧的有限项作为近似，比如，截取 8 项、16 项或 32 项。在这样截取的时候，一般还要对截得的冲击响应 $h(t_1-nT)$ 加窗函数(加窗函数的方法可参阅 9.9 节)。为了使叙述比较简洁，在这里只截取 4 项。但在实际的再采样操作中，至少截取 8 项。

在截取 4 项之后，得到 $x(t_1)$ 的近似值：

$$\begin{aligned} x(t_1) &\approx \sum_{n=-1}^{2} x(nT)h(t_1 - nT) \\ &= x(-T)h(t_1+T) + x(0)h(t_1) + x(T)h(t_1 - T) \\ &\quad + x(2T)h(t_1 - 2T) \end{aligned} \tag{8-9}$$

上式中的 4 个乘积项分别对应于图 8-15 中的－1、0、1、2 这 4 条虚线所指示的乘法。如果截取 8 项，那就要在图 8-15 中向两侧各增加两个乘积项，这就是图中的－3、－2、3、4 这 4 条虚线。

用图 8-15 中的具体数值来计算这个 $x(t_1)$。根据图 8-15 中的标尺和 $x(t)$ 的波形，可以大概确定这些值：$x(-T)=10$、$x(0)=25$、$x(T)=41$、$x(2T)=57$，再采样的时间点为 $t_1=0.37T$。

首先计算出式(8-7)中的 $t/T=0.37$，然后就可以使用式(8-7)和式(8-9)计算 $x(0.37T)$ 的近似值：

$$\begin{aligned} x(0.37T) &\approx 10\mathrm{sinc}(1.37) + 25\mathrm{sinc}(0.37) + 41\mathrm{sinc}(-0.63) + 57\mathrm{sinc}(-1.63) \\ &= 10\times(-0.213) + 25\times 0.789 + 41\times 0.464 + 57\times(-0.179) \\ &= 26.4 \end{aligned} \tag{8-10}$$

将上式的结果与图 8-15 中 $x(t_1)$ 的具体数值相比之后，发现这个计算结果有较大的误差。其中最根本的原因是对无限长的 $h(t)$ 只截取了其中的 4 个样点。如果增加点数，用前后 4 个或 8 个样点计算 $x(0.37T)$，一定可以得到较好的精度。此外，施加恰当的窗函数也可以有效提高再采样的精度，而式(8-9)中的计算没有加窗函数。但是，除了这两个原因之外，我们可以想到，引起误差的另一个重要原因是所谓的“系数归一化”，就是使式(8-9)中的 4 个 $h(t_1-nT)$ 之和等于 1。表 8-1 列出了 $h(t_1-nT)$ 归一化之后的计算结果。这个计算结果是 $x(t_1)=30.63$，与图 8-15 中的 $x(t_1)$ 非常接近。

表 8-1

n	-1	0	1	2
$x(nT)$	10.0	25.0	41.0	57.0
$h(t_1-nT)$	-0.213	0.789	0.464	-0.179
归一化的 $h_n(t_1-nT)$	-0.247	0.916	0.539	-0.208
$x(nT)h_n(t_1-nT)$	-2.47	22.9	22.1	-11.9
$x(0.37T)$			30.63	

最后我们对信号重构做一个简要说明，因为信号重构是数字信号处理的一个基本内容。信号重构的意思是，如果使用式(8-7)的连续时域冲击响应 $h(t)$对式(8-5)中的连续时域信号 $x_S(t)$进行滤波，就可以重构出原来连续时域中的信号 $x(t)$。因此，式(8-7)所表示的连续时域的理想滤波器就叫做重构滤波器。但从另一方面说，信号重构只是理论上的叙述，是无法实现的。从离散时域返回连续时域，一般都是使用 DAC(数模转换器)的方法，这就是下一节要讨论的内容。

8.5 用 DAC 从离散时域返回连续时域

大多数离散时域信号必须转变为连续时域信号之后才可以被利用，比如音频信号。所以，在这一节中我们将叙述 DAC 的功能，以及由于使用 DAC 而引起的信号频谱变化的一些问题。

DAC 的操作过程正好与 3.1 节中的 ADC 相反，可以分为反量化器和零阶保持器(ZOH)两个部分，如图 8-16 所示。其中的反量化器把图中的数字信号 $x(nT)$转变为采样数据信号 $x_{SD}(t)$；而采样数据信号 $x_{SD}(t)$已经可以看作连续时域信号了。零阶保持器的功能是把反量化器输出信号 $x_{SD}(t)$的每个样点值都延续一个采样周期，以此产生一个阶梯形的输出信号 $x_{zoh}(t)$。输出信号 $x_{zoh}(t)$只在采样时间点上才等于原来的模拟信号(指图 8-16 右下方的虚线)，在其他时间上则完全不同于原来的模拟信号。

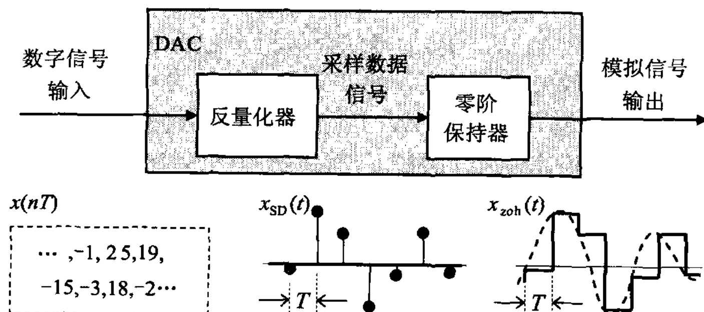


图 8-16　DAC 的操作可分解为反量化和零阶保持两个步骤

那么，是什么原因使DAC的输出信号与原来的波形有这样的不同呢？把图8-16与图8-13比较后可知，原因是用DAC中的零阶保持器取代了图8-13b的理想低通滤波器。所以，零阶保持器是问题所在，也是我们在下面要讨论的。

零阶保持器的功能可以用图8-17来表示，图中的T为离散序列的采样周期。在图8-17中，零阶保持器把$x_{SD}(t)$的每个样点值保持了时间T，然后回到零；这就生成了图8-17c中的阶梯波形$x_{zoh}(t)$。所以，零阶保持器的时域特性可以表示为图8-17b中的$h_{zoh}(t)$。实际上，$h_{zoh}(t)$就是零阶保持器的冲击响应，因为它的每一个输入样点都可以看作一个δ函数。为了计算上的方便，我们把图8-17b中$h_{zoh}(t)$的高度设为$1/T$。

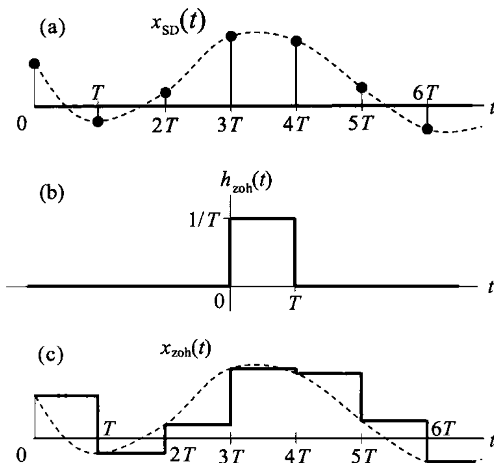


图8-17 零阶保持器的功能

我们来分析零阶保持器的频率特性。根据图8-17b中零阶保持器的冲击响应$h_{zoh}(t)$，可以用傅里叶变换来计算它的频率响应：

$$H_{zoh}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h_{zoh}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}\frac{1}{T}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega T}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}-\mathrm{e}^{0})=\frac{1}{\mathrm{j}\omega T}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})\tag{8-11}$$

对上式最右边括号中的两项，可以提出公因子$\exp(-\mathrm{j}\omega T/2)$，然后使用正弦函数的欧拉恒等变换。这样，上式变为：

$$H_{zoh}(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}}{\mathrm{j}\omega T}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\tag{8-12}$$

由式(8-12)可知，零阶保持器的幅频响应是一个sinc函数，或者说，零阶保持器是一个sinc滤波器。当ω为ω_S的整数倍时，式(8-12)的正弦函数中的弧度数为：

$$\frac{\omega T}{2}=\frac{k\omega_S T}{2}=k\pi\quad k=\cdots,2,1,0,1,2,\cdots$$

因此，零阶保持器的幅频响应在$\omega=0$时等于1；在整数倍于ω_S的频率处都等于零。根据式(8-12)画出零阶保持器的幅频响应，如图8-18所示。

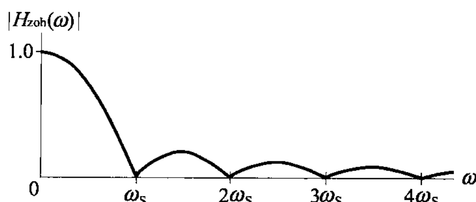


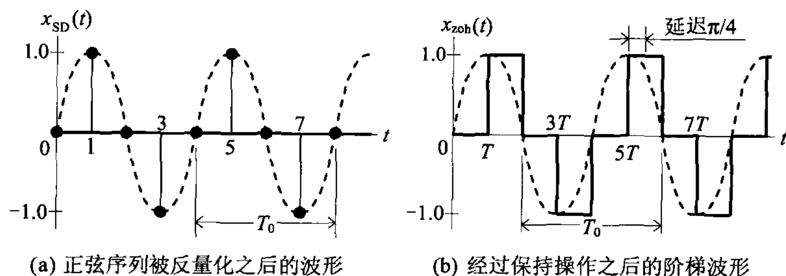
图8-18 零阶保持器的幅频响应

根据式(8-12)，零阶保持器的相频响应等于$-\omega T/2$，是线性相移。

注意：当频率ω越过$\pm\omega_S$、$\pm 3\omega_S$等频率点时，式(8-12)中的分式会出现负号。把这个负号归入相位之后，就使相位产生

180°的突变。但如果我们仅考虑0到ω_S的主要频率区，相移就是线性的。

我们用一个例子来验证零阶保持器对信号相位的影响。这个例子是一个振幅等于1的离散时域正弦信号，它的频率是采样频率的1/4，所以，在每个信号周期T_0内有4个样点。图8-19画出了这个正弦序列经过DAC的反量化操作之后得到的采样数据信号$x_{SD}(t)$，以及被零阶保持后的阶梯波形$x_{zoh}(t)$。图中假设正弦序列的初相为零。从图8-19b可以看出，DAC的零阶保持操作使DAC的输出信号$x_{zoh}(t)$产生了$\pi/4$的相位延迟。这个$-\pi/4$的相移是由式(8-12)中的相频响应$-\omega T/2$产生的。因为现在的正弦信号的频率等于$\omega_S/4$，所以它的相移应该等于$-\omega T/2=-(\omega_S/4)(2\pi/\omega_S)/2=-\pi/4$。



(a) 正弦序列被反量化之后的波形　　(b) 经过保持操作之后的阶梯波形

图8-19　一个正弦序列被DAC反量化之后得到的采样数据信号$x_{SD}(t)$，以及被DAC零阶保持操作之后的阶梯波形$x_{zoh}(t)$

零阶保持器的幅频响应对DAC输出的连续时域信号$x_{zoh}(t)$的影响可以用图8-20来解释。图8-20a表示了一个正余弦信号被采样后所形成的线谱。在这些谱线中，只有最低频率处的那条谱线是需要的，其他所有频率较高的谱线都是不需要的，都应该用理想低通滤波器滤除。图8-20b中的虚线表示了零阶保持器的幅频响应(即图8-18中的曲线)，也就是零阶保持器的滤波作用。因为零阶保持器的幅频响应不像理想滤波器的幅频响应那么好，所以，那些高频谱线没有被完全滤除，而只是被衰减之后仍然进入到DAC的输出信号中，这就是DAC输出信号变为阶梯形状的原因。这些被衰减的高频谱线一般叫做“残余镜像”。消除这些残余镜像的方法是在DAC之后使用一个截止频率等于$\omega_S/2$的模拟滤波器。如果这个模拟滤波器有很好的过渡带和阻带特性，那么，从这个模拟滤波器得到的输出信号就可以非常接近于原来的模拟信号。所以，在一般情况下，DAC的后面要有一个抗镜像模拟低通滤波器；这就好比在ADC之前一般都要有一个抗混叠模拟低通滤波器。

DAC中的零阶保持器除了引起残余镜像失真之外，它的幅频响应还会使信号通带内较高频率的成分受到衰减，如图8-21所示。我们可以根据式(8-12)计算出信号通带内的衰减量。比如，当频率等于$\omega_S/2$(通带的最高频率)时，DAC零阶保持器的幅频响应衰减到了0.636，即图中的-4.0 dB。对这个幅频响应衰减的补偿可以在离散时域或连续时域中进行。图8-21画出了两种最简单的离散时域补偿滤波器的幅频响应。其中的FIR补偿滤波器的传递函数是：

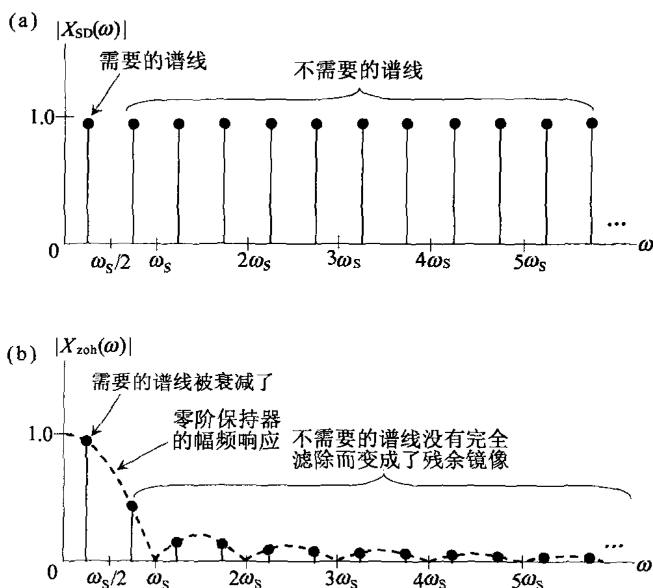


图 8-20　零阶保持器的幅频响应使 $x_{zoh}(t)$ 中携带了大量的"残余镜像"高频分量

$$H_1(z)=-\frac{1}{16}+\frac{9}{8}z^{-1}-\frac{1}{16}z^{-2} \qquad (8\text{-}13)$$

而 IIR 补偿滤波器的传递函数是：

$$H_2(z)=\frac{9}{8+z^{-1}} \qquad (8\text{-}14)$$

从图 8-21 中的曲线形状来看，这两个滤波器都有一定的频率补偿能力。当然，我们可以设计更好的补偿滤波器，或者使用置于 DAC 后面的模拟滤波器进行补偿。

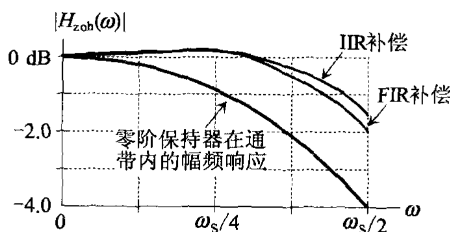


图 8-21　零阶保持器通带内的幅频响应及其离散时域补偿

小结

- ☐ 提高数字信号采样率的方法是插值，这就是在样点之间均匀补零。均匀补零不会改变原来数字信号的频谱。但在补零之后必须增加一次低通滤波，以滤除高频区内的多余频谱。
- ☐ 降低数字信号采样率的方法是抽取，但必须保证抽取操作不会产生频率混叠。所以，在抽取之前的低通滤波有时是必需的。
- ☐ 结合使用插值和抽取可以任意改变数字信号的采样率。
- ☐ 计算出两个样点之间任意时间点上的采样值的方法叫做再采样，这是从理论上把离散时域信号返回到连续时域中的计算方法，其中使用了模拟理想低通滤

波器。

- □ 模拟理想低通滤波器的系统冲击响应是一个时间上无限长的 sinc 函数。在实际工作中都是使用恰当的窗函数截取其中的主要部分。
- □ 从离散时域返回到连续时域的时候，实际上可以使用的方法只有 DAC（数字 PWM 也可以完成数模转换，但一般只用于过采样的情况）。而且在 DAC 之后，一般都需要增加一次模拟低通滤波，以抑制残余镜像。同时，还要注意零阶保持器对通带内较高频率区信号的衰减，在必要时可以进行数字或模拟补偿。

习题

8.1　假设语音信号的采样率为 8 kHz。为了正确提取语音的基频（也叫声调），一般先要把采样率降下来。已知语音基频的最高频率不超过 500 Hz，试设计这个语音信号的变采样率框图。

8.2　在产生一个连续时域正弦信号时，我们可以先产生振幅等于 1 的离散正弦序列 $y(n)$，然后经过 DAC 转换成连续时域信号。其中，正弦信号的频率为 ω_0，采样率为 ω_S。

(1) 画出 $\omega_0=\omega_S/8$ 时 DAC 输出信号的幅频谱。

(2) 画出 $\omega_0=\omega_S/8$ 时 DAC 的输出信号 $y_d(t)$。

(3) 确定 DAC 对频率位于$(\omega_S-\omega_0)$处的第一个镜像谱线的衰减量。

(4) 假设要产生频率 ω_0从 0 到 $\omega_S/4$ 的正弦信号，试确定后置模拟低通滤波器的截止频率。

8.3　我们想用一个截止频率为 $\omega_S/2$ 的理想模拟滤波器从离散序列 $a(n)$恢复出原来的模拟信号 $a_c(t)$。做法是把图 8-14 中的 sinc 函数的垂直轴分别与离散序列$a(n)$中的每个样点对齐，因此，这个 sinc 波形就可以看作由每一个样点 $a(n)$产生的连续时域波形。把所有这样的波形叠加起来就可以重构模拟信号 $a_c(t)$。试画出大概的叠加波形图。为了简化画制过程，我们假设 $a(n)$都等于 1，并可借助表 1-1。

第 9 章 离散傅里叶变换

离散傅里叶变换(DFT)是离散时域中的频域分析工具,它可以显示离散时域信号的频率组成。这就好比在连续时域中用傅里叶级数表示周期信号的频率组成。从主要性质来看,离散时域中的 DFT 与连续时域中的傅里叶级数展开非常相似。由于这个相似性,我们就可以利用傅里叶级数展开导出 DFT 的计算公式。我们的讨论从复指数形式的傅里叶级数开始。

9.1 复指数形式的傅里叶级数

1.4 节已经详细叙述了把连续时域的周期信号展开为傅里叶级数的方法。我们假设被展开的连续时域周期信号 $x(t)$ 的周期为 T_0,因而它的复指数形式的傅里叶级数展开式就像式(1-36)那样。为了本章叙述的一致性,我们用 k 代替式(1-36)中的 n,因而式(1-36)改写为:

$$x(t) = \cdots + X_{-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t} + X_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} + X_0 + X_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + X_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t} + \cdots$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \tag{9-1}$$

其中,$\omega_0 = 2\pi/T_0$,为模拟信号 $x(t)$ 的频率,也是傅里叶级数展开式中的基频,而式(9-1)中各复指数项的系数 X_k 可以按照式(1-41)计算:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2\cdots \tag{9-2}$$

9.2 离散傅里叶变换

由式(9-2)可以得出一个对于 DFT 很有用的结论:把周期信号 $x(t)$ 展开为复指数形式的傅里叶级数的方法,是用一个随时间而围绕单位圆旋转的单位复矢量 $\exp(-\mathrm{j}k\omega_0 t)$ 去乘 $x(t)$,然后计算出乘积在 $x(t)$ 的一个周期内的积分平均值,其中的 $k\omega_0$ 是式(9-2)中正在计算的复指数分量的频率,它是基频的 k 整数倍。

如果把式(9-2)的这个算法移植到离散时域中,就可以这样说:计算离散序列 $x(n)$ 的 DFT 的方法,是用一个随时间而围绕单位圆旋转的单位复矢量 $\exp(-\mathrm{j}k\omega_0 nT)$ 去乘

$x(n)$，然后计算出这个乘积在 $x(n)$的一个信号周期内的累加和的平均值。其中的 $k\omega_0$ 是 $x(n)$的第 k 个 DFT 分量的频率，而 T 为离散时域的采样周期。

这里，我们看出了傅里叶级数展开与 DFT 之间的一个不同点：傅里叶级数展开中的信号周期是已知的；而 DFT 由于是用作实时分析的，所以，信号周期是不知道的。因此，对于离散序列 $x(n)$，我们只能说成是从一个很长的离散时域信号中截取下来的连续的 N 个数字样点。这个截取操作表示在图 9-1 中，图 9-1a 中的 $x_0(n)$就是那个很长的离散时域信号，而图 9-1b 中由 N 个样点组成的离散序列 $x(n)$是从 $x_0(n)$中随意截取下来的。

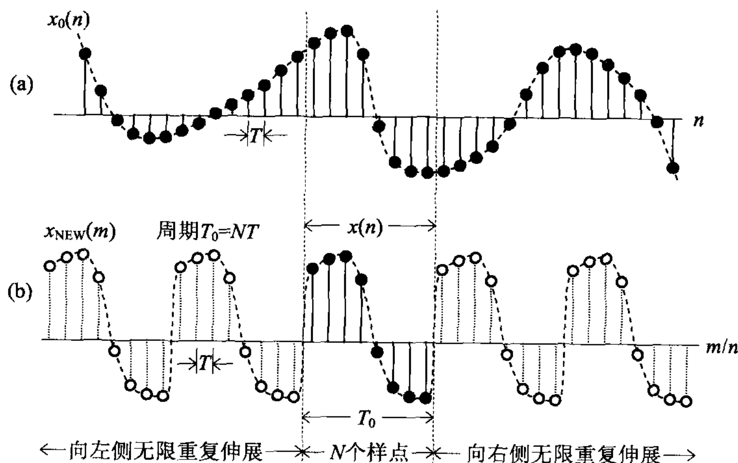


图 9-1　从数字信号 $x_0(n)$中截取 N 个样点，把这 N 个样点构成的 $x(n)$看作一个周期，向两侧无限重复伸展而构成 $x_{NEW}(m)$

为了能借用连续时域傅里叶级数展开的计算方法，我们必须用截得的 $x(n)$构成一个新的周期信号。其做法是把 $x(n)$视作一个周期，并以这样的一个周期向两侧无限重复和延伸，以此组成一个新的离散时域周期信号。这就是图 9-1b 中的 $x_{NEW}(m)$，它的周期 $T_0=NT$。这样之后，我们就可以用连续时域中傅里叶级数展开的类似的分析方法，对离散序列 $x(n)$进行分析。

现在就可以参照式(9-2)，写出图 9-1b 中由 N 个样点组成的离散序列 $x(n)$的 DFT 计算公式：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 nT}\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-3}$$

其中，$\omega_0=2\pi/T_0=2\pi/(\mathrm{NT})$是 $x_{NEW}(m)$的频率，在 DFT 中称为 DFT 的基频；T 为采样周期。k 的变化范围从 0 到$(N-1)$，这是因为离散时域系统的频谱是以采样频率 ω_S 为周期而循环的。

把上面的 $\omega_0=2\pi/(\mathrm{NT})$代入式(9-3)之后，得到：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1\tag{9-4}$$

我们通常把式(9-4)的复指数中的常数因子 $\exp(-\mathrm{j}2\pi/N)$写成 W_N：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}=W_N\tag{9-5}$$

在 DFT 中，W_N被叫做旋转因子。

在使用了式(9-5)的旋转因子 W_N的简洁表示之后，式(9-4)变为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1\tag{9-6}$$

式(9-6)就是常用的 DFT 计算公式。其中的 W_N^{kn}随着 k 和 n 的递增而围绕单位圆旋转，所以叫做*旋转矢量*。而且，从式(9-5)可知，W_N^{kn}中的复指数是负的，所以，旋转矢量 W_N^{kn}是随着 k 与 n 的递增而向负方向(顺时针)旋转的。此外，类似于式(9-2)中积分号之前的比例因子 $1/T_0$，在式(9-6)的连加号之前也应该有一个比例因子 $1/N$。但习惯上的做法是把它移到 DFT 反变换的公式中。

我们有必要解释 DFT 计算公式(9-6)中的 3 个参数：N、n 和 k。N 为输入序列 $x(n)$的样点数，也是 DFT 输出的频率点数，即 $X(k)$的个数。n 为输入序列 $x(n)$的样点序号；k 为输出频谱 $X(k)$的序号；n 和 k 都是从 0 变到$(N-1)$并以 N 为周期而循环。

DFT 中这 3 个参数的相互关系可以表示在图 9-2 中，图中的 $N=8$。在图 9-2 的左边，我们用直线表示了这 3 个参数之间的关系。其中，$x(n)$的时间长度 NT 确定了 DFT 的基频 $\omega_0=2\pi/(NT)$。这个基频也就是图 9-1b 中那个很长的数字信号 $x_{\mathrm{NEW}}(m)$的频率。离散时域中的频谱总是以采样频率 ω_S而循环的，所以，DFT 中最高频率分量的频率总是比 ω_S小一个 ω_0。

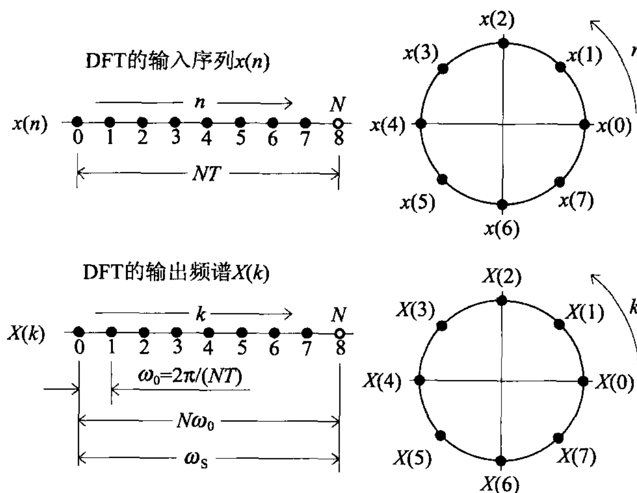


图 9-2 DFT 中的 3 个参数：N、n 和 k。图中 $N=8$

上面的分析指出了 DFT 和傅里叶级数展开的一个不同点：傅里叶级数展开式中

谐波分量的频率是趋于无穷大的，而 DFT 频谱中的最高频率却不超过采样频率 ω_S，尽管 DFT 和傅里叶级数展开在其他方面是非常相似的。

由于 DFT 中的 $x(n)$ 和 $X(k)$ 都是以 N 为周期而循环的，我们就可以把图中左边的直线形式画成右边的圆周形式。从右边的两个圆可知，在 $N=8$ 的前提下，DFT 中的 $x(8)$ 就是 $x(0)$，$X(9)$ 就是 $X(1)$，等等。

最后，我们从图 9-2 还可以知道，在 DFT 的环境中，时间和频率都是离散的；但在一般的 DSP 处理中，时间是离散的，频率是连续的。

9.3　离散傅里叶反变换

我们可以参照式(9-1)写出 DFT 反变换的计算公式：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-7}$$

上式右边的 $1/N$ 是从式(9-6)中移过来的。旋转矢量 W_N^{-kn} 是随 k 和 n 的递增而正向(逆时针)旋转的，这与式(9-6)中 W_N^{kn} 的旋转方向正好相反。DFT 与 DFT 反变换在具体计算时就只有这点差别。

我们来证明 DFT 反变换公式(9-7)。只要把式(9-6)代入式(9-7)的右边即可。但必须注意把式(9-6)中的变量 n 改为其他符号，比如 m。这样，这个 m 就与式(9-7)中的 n 无关，两者可以独立变化。这样之后，式(9-7)的右边可以写为：

$$\text{式(9-7) 的右边}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}\right]W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{k(m-n)}$$

上式中，k 和 m 是递增变化的，而 n 是暂时固定的，因为我们正在试图计算式(9-7)左边的 $x(n)$。

把上式右边的两个连加号交换位置之后，可以得到：

$$\text{式(9-7) 的右边}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}x(m)W_N^{k(m-n)} \tag{9-8}$$

在上式右边，随着 m 和 k 分别从 0 变到 $(N-1)$，总共要完成 $N\times N$ 次累加。在这 $N\times N$ 次累加中，$m=n$ 时的 N 个乘积项都等于 $x(n)$。而所有其他 $m\neq n$ 的乘积项，由于 $x(m)$ 每次乘一个不同的复指数矢量而互相抵消。这其实就是复指数信号的对称性。我们用一个具体的数值来说明。

假设 $n=0$，这就是说，我们正试图用式(9-8)计算 $x(0)$。在式(9-8)中，为了计算 $x(0)$，m 要从 0 变到 $(N-1)$。我们先计算 $m=0$ 时式(9-8)右边的后一个累加和。这时，k 要从 0 变到 $(N-1)$，一共做 N 次累加。这个计算过程可以写为：

$$m\text{ 为 0 时的累加和}=\sum_{k=0}^{N-1}x(0)W_N^0=\sum_{k=0}^{N-1}x(0)e^{j0}=\sum_{k=0}^{N-1}x(0)=Nx(0) \tag{9-9}$$

我们再来看 $m=1$ 时的累加和，这也要做 N 次累加：

$$m\text{ 为 1 时的累加和}=\sum_{k=0}^{N-1}x(1)W_N^k=x(1)\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j2\pi k/N} \tag{9-10}$$

利用欧拉恒等变换之后，上式可以写为：

$$m\text{ 为 1 时的累加和} = x(1)\left[\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi k/N) - \mathrm{j}\sum_{k=0}^{N-1}\sin(2\pi k/N)\right] \quad (9\text{-}11)$$

在上式中，两个连加运算中的余弦函数和正弦函数都分别走过一个整周期。所以，根据正余弦函数的对称性，两个连加运算的结果都一定为零。我们同样可以证明，当 $m=2、3、\cdots、N-1$ 时，相应的累加和也一定都等于零。

所以，当 $n=0$ 时，式(9-8)可以演算为：

$$\text{式(9-7)的右边} = \frac{1}{N}Nx(0) = x(0)$$

对于 n 的其他值，同样有：

$$\text{式(9-7)的右边} = \frac{1}{N}Nx(n) = x(n)$$

这就证明了 DFT 反变换公式(9-7)。我们将在后文中证明 DFT 计算公式(9-6)的正确性。

9.4 离散傅里叶变换与反变换小结

- ❑ DFT 的输入是离散序列 $x(n)$，DFT 的输出是频谱分量 $X(k)$。
- ❑ DFT 中最主要的参数是 DFT 的点数 N；N 也是输入序列 $x(n)$ 的样点数和输出频谱的频率点数。
- ❑ 在 DFT 中，输入序列 $x(n)$ 和输出频谱 $X(k)$ 都是以 N 为周期而循环的。$x(n)$ 的周期是 NT，而 $X(k)$ 的“周期”是采样频率 ω_S。
- ❑ DFT 输出频谱的基频 ω_0 等于 $2\pi/(NT)$，即等于图 9-1 下面数字序列 $x_{\mathrm{NEW}}(m)$ 的频率，也是 $X(1)$ 的频率。
- ❑ DFT 输出频谱中的最高频率为 $(N-1)\omega_0$，这也是 DFT 中最后一个频率分量 $X(N-1)$ 的频率。像所有的离散时域系统一样，DFT 频谱中可用的最高频率不超过采样频率 ω_S。
- ❑ 旋转因子 W_N 是 DFT 中最基本的旋转矢量，由它构成的旋转矢量 W_N^{kn} 和 W_N^{-kn} 在 DFT 算法中起到关键性的作用。
- ❑ DFT 和 DFT 反变换的计算都是 N 个乘积项的累加，其中的每个乘积项都是 $x(n)$ 与 W_N^{kn} 或 W_N^{-kn} 的乘积。

9.5 旋转矢量

DFT 和 DFT 反变换的计算公式(9-6)和公式(9-7)虽然有些复杂，但也是有规律的：每次做乘法时，都是将 $x(n)$ 与一个旋转矢量 W_N^{kn} 或 W_N^{-kn} 相乘；而旋转矢量 W_N^{kn} 或 W_N^{-kn} 是随 k 和 n 的递增而旋转的。所以，理解 DFT 的关键就是理解这些旋转矢量。

使用具体的参数会使讨论比较清晰，我们使用 $N=8$，DFT 中的离散序列 $x(n)$ 就暂时固定为 8 个样点。因此，样点序号 n 就从 0 变到 7，DFT 频率点的序号 k 也从 0 变到 7。此外，DFT 的基频 $\omega_0=2\pi/(8T)$。

可以把基频 ω_0 转化为用归一化频率表示，这就是把基频 ω_0 除以采样频率 ω_S，再乘以 2π。这样，归一化基频为：

$$\Omega_0 = 2\pi\frac{\omega_0}{\omega_S} = 2\pi\frac{2\pi/(NT)}{2\pi/T} = \frac{2\pi}{N} \tag{9-12}$$

下面解释归一化基频 Ω_0 的意思。因为采样频率 ω_S 的归一化频率 $\Omega_S=2\pi$，因此可以把归一化的采样频率 Ω_S 看作围绕单位圆一周的 2π 个弧度，而归一化基频 Ω_0 就是这样一个圆周的 N 分之一。这也是 DFT 计算中的最小角度。在 $N=8$ 的具体例子中，归一化基频 $\Omega_0=\pi/4$，为一个圆周的八分之一。

现在来讨论式(9-6)中的旋转矢量 W_N^{kn}，现在变为 W_8^{kn}。首先，旋转矢量 W_8^{kn} 中的 k 表示正在计算的频率点；而 n 表示样点序号。在把 k 和 n 结合起来之后，式(9-6)的计算过程就可叙述为：把 k 固定为 0 到 7 之间的某个值，然后使 n 从 0 变到 7，计算出 8 个 $x(n)$ 和 W_N^{kn} 的乘积项；把这 8 个乘积项加在一起，就计算出一个 $X(k)$。然后可以令 k 加 1，用同样的方法计算出第二个 $X(k)$。但在计算各个 $X(k)$ 的时候，由于 k 的不同，W_N^{kn} 的旋转速度也不同。由此，我们知道，n 的递增使矢量 W_8^{kn} 等速旋转，而 k 的值确定了 W_8^{kn} 等速旋转的速率。

我们把上面对 W_8^{kn} 的分析具体地画在了图 9-3 中。图中从(a)到(h)的 8 个圆对应于 k 从 0 变到 7。每个圆中的 v_0 到 v_7 是复矢量 W_8^{kn} 随着 n 的递增而旋转出的 8 个位置。对于 DFT 计算公式(9-6)，只要 $N=8$，图 9-3 中的这些复矢量位置是不变的。

我们来说明图 9-3 中每个 k 值的情况。在图 9-3a 中，$k=0$，这表示正在计算 DFT 中的零频分量 $X(0)$。由式(9-6)可知，旋转矢量是不动的，恒等于 1，v_0 到 v_7 这 8 个矢量重叠于正实轴上。因此，由式(9-6)计算出的结果是所有 8 个 $x(n)$ 之和。如果除以 8(这个操作已被移到 DFT 反变换中)，就是 $x(n)$ 的平均值。

在图 9-3b 中，$k=1$。这是在计算 DFT 的基频分量 $X(1)$。当 $n=0$ 时，旋转矢量位于 v_0 的位置。随着 n 的递增，旋转矢量每次转过 $-\pi/4$ 的角度，先后旋转到图 9-3b 中从 v_1 到 v_7 的 7 个位置。当旋转矢量转到 v_7 位置时，$X(1)$ 就计算完毕。$k=1$ 是旋转矢量转得最慢的情况($k=0$ 除外)。

当 $k=2$、3、4、5、6、7 时，旋转矢量的转动情况是相似的，只是转速越来越快。这就是图 9-3c 到 9-3h 的图形。图 9-3h 中的旋转矢量的转动情况与图 9-3b 很相似，这是因为图 9-3h 中矢量的转动速度太快而看起来好像是在反方向旋转。此外，图 9-3c 与图 9-3g 以及图 9-3d 与图 9-3f 也是同样的情况。这其实反映了旋转矢量 W_8^{kn} 的周期性和对称性。但图 9-3a 和图 9-3e 是两个独立的情况。

由图 9-3 可知，在 $N=8$ 的情况下，总共有 8 个不同的位置。如果 $N=256$，就有 256 个矢量位置；$N=65\ 536$，就有 65 536 个矢量位置。

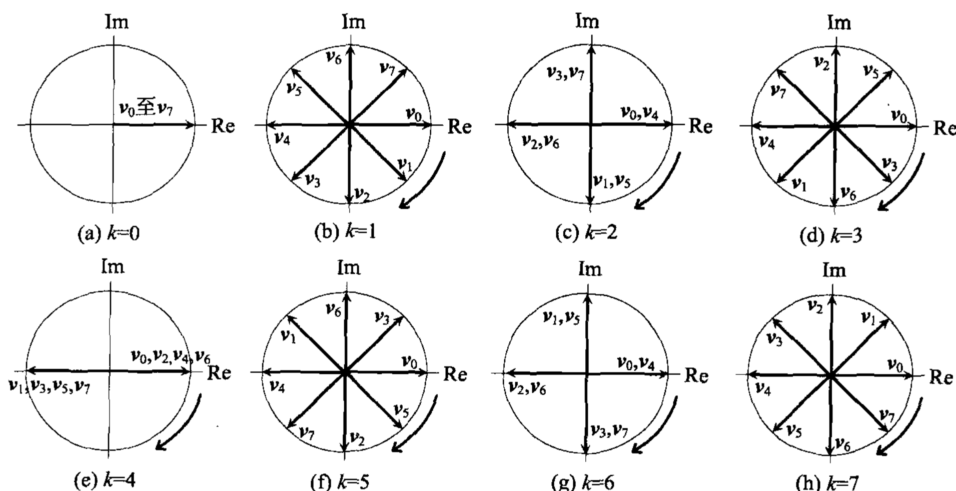


图 9-3 把 k 固定之后，旋转矢量 W_8^{kn} 随 n 的增加而旋转出 8 个位置

9.6 整数基频信号分解到 DFT 频率点

由于 DFT 计算公式(9-6)是依靠旋转矢量 W_N^{kn} 完成的，所以，我们也应该把输入序列 $x(n)$ 表示为复矢量的形式。

先假定 DFT 的输入信号 $x_1(n)$ 是一个由 N 个样点组成的余弦信号。而且，这个余弦信号的频率恰好等于 DFT 基频的整数倍（“整数基频信号”就是这个意思）。我们用 m 表示这个整数倍($m=0,1,2,3,\cdots,N/2$)。因此，$x_1(n)$ 的 N 个样点恰好构成了自己的 m 个整周期。这样的一个余弦信号 $x_1(n)$ 被画在图 9-4 中。图中 $m=2$，即信号频率正好是 DFT 基频的两倍。此外，由于输入序列应该被看成是周期性循环的，所以，我们把 $x_1(n)$ 的 8 个样点向两侧周期性地无限延伸，如图 9-4 所示。

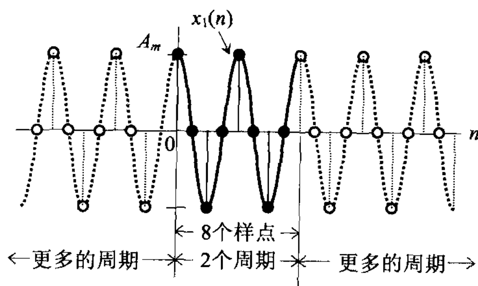


图 9-4 $x_1(n)$ 的 8 个样点构成了自己的两个周期，并向两侧周期性地延伸；$m=2$

我们假设这个余弦信号的振幅为 A_m，初始相位为零。所以，这个余弦信号可以写为：

$$x_1(n)=A_m\cos(m\omega_0 nT) \qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-13}$$

其中，$\omega_0=2\pi/(NT)$，是 DFT 的基频。

把 $\omega_0=2\pi/(NT)$代入式(9-13)之后，就可以得到：

$$x_1(n)=A_m\cos\left(m\frac{2\pi}{NT}nT\right)=A_m\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right)\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-14}$$

现在根据欧拉恒等式把式(9-14)中的余弦函数变成复指数的形式：

$$x_1(n)=\frac{A_m}{2}(e^{j2\pi nm/N}+e^{-j2\pi nm/N}) \tag{9-15}$$

因为复指数信号总是以它的幅角的 2π 为周期的，所以，我们可以对上式中后一个复指数的指数部分加上 $2n\pi$，以使幅角从负变正：

$$x_1(n)=\frac{A_m}{2}(e^{j2\pi nm/N}+e^{j2\pi(N-m)n/N}) \tag{9-16}$$

从上式可知，一个位于 DFT 频率点 m 上的余弦信号，可以分解成位于 DFT 频率点 m 和$(N-m)$上的两个复指数信号。由式(9-15)和式(9-16)可知，这两个复指数具有相等的幅度和相反的频率，因而具有相反的相位。这就是说，如果知道了 $x_1(n)$从 0 到 $\omega_S/2$ 频率范围内的特性，也就知道了它在 $\omega_S/2$ 到 ω_S范围内的特性。显然，我们只需讨论 $x_1(n)$在前半个频带范围内的情况。这就是式(9-16)右边的前一个复指数信号。我们用 $x(n)$表示这个复指数信号：

$$x(n)=\frac{A_m}{2}e^{j2\pi nm/N} \tag{9-17}$$

现在来计算复指数序列 $x(n)$的 DFT。按照 DFT 计算公式(9-6)，$X(k)$应该为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A_m}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}mn}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{A_m}{2}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} \tag{9-18}$$

其中 m 是一个表示 $x(n)$频率的常数。此外，当我们要计算某个 $X(k)$时，k 是相对固定的。所以在上式中，m 与 k 都可以视为常数；而 m 与 k 之间的关系，存在两种情况：$m=k$或者 $m\neq k$。

当 $m=k$ 时，式(9-18)中的复指数项恒等于 1[类似于式(9-9)中的情况]。所以，连加运算的结果就等于 N。当 $m\neq k$ 时，N 个旋转矢量由于周期性和对称性而互相抵消[类似于式(9-10)中的情况]，所以，连加运算的结果等于零。因此，式(9-18)可以演算为：

$$X(k)=\begin{cases}NA_m/2 & k=m\\ 0 & k\neq m\end{cases} \tag{9-19}$$

整数基频复指数信号 $x(n)$的 N 个 $X(k)$就这样很容易地计算出来了。

我们来解释式(9-19)。在式(9-19)中，当 $k=m$ 时得到的 $X(m)$的幅值为 $NA_m/2$，是信号 $x(n)$原来幅度的 N 倍，这个 N 倍将在 DFT 反变换时用除以 N 来抵消。$X(m)$的幅角为零，表示 $X(m)$保留了信号 $x(n)$原来的相位[这就是图 9-4 中被截取的第一个样点的相位，也就是式(9-13)和式(9-17)中的初始相位，这个相位等于零]。所以，复指数信号 $x(n)$的幅度和相位信息都被完整地保留在了 $X(m)$中。所有 $k\neq m$ 的 $X(k)$

全部等于零，这当然是正确的。所以，DFT 计算公式(9-6)对于整数基频信号是完全正确的。如果用式(9-16)中的后一个复指数信号代替 $x(n)$，我们将得到完全相似的结果：$X(N-m)$的幅值为 $NA_m/2$，相位等于零；而其他的 $X(k)$都等于零。

9.7 非整数基频信号分解到 DFT 频率点

非整数基频信号是指信号的频率不是 DFT 基频的整数倍。图 9-5 中的信号序列 $x_2(n)$就是这样的一个非整数基频信号。图中的信号频率等于 DFT 基频的 2.5 倍，即 $m=2.5$。所以，$x_2(n)$的 8 个样点构成了自己的 2.5 个周期。我们仍然使用 $N=8$，而且像图 9-4 那样，把这 8 个样点向两侧周期性地无限延伸。与图 9-4 不同的是，图 9-5 中在两个 8 样点周期之间的连接处有非常大的信号突变。由于这个突变，信号序列 $x_2(n)$的 DFT 频谱就会有相应的变化。本节就是讨论这个变化的。

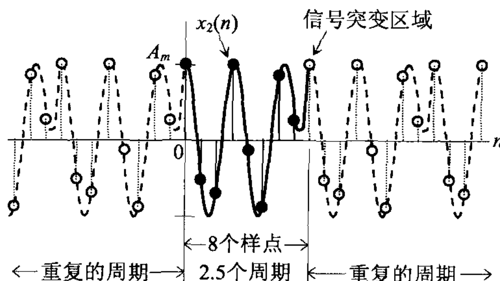


图 9-5 $x_2(n)$的 8 个样点构成了自己的 2.5 个周期，并向两侧周期性地延伸；$m=2.5$

我们采用与上一节相同的分析方法。对于输入序列 $x_2(n)$，我们只选择式(9-16)中的前一个复指数信号，也就是式(9-17)中的那个复指数序列，现重复如下：

$$x(n)=\frac{A_m}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/N} \qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-20}$$

但现在的 m 是一个非整数，它的取值范围在 0 与 $N/2$ 之间，比如在图 9-5 中是$m=2.5$。

我们仍然利用 DFT 的计算公式来计算这个复指数序列 $x(n)$的 DFT。按照式(9-6)，$X(k)$为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A_m}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{A_m}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(m-k)n} \tag{9-21}$$

该式与式(9-18)在形式上是完全一样的。

由式(9-21)可知，$X(k)$由两部分组成：第一部分是式(9-21)中连加号之前的部分，它表示了信号 $x(n)$的振幅 $A_m/2$ 和相位(这个相位等于零，所以没有显现)；第二部分是后面的 N 个复向量的累加和。我们只需分析第二部分。

在第二部分中，我们用 d 表示频率差$(m-k)$，用矢量 $v(d)$表示 N 个矢量的累

加和：

$$v(d)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}dn} \tag{9-22}$$

我们先分析式(9-22)中的指数部分。其中的 $2\pi/N$ 是把单位圆 N 等分之后取其一。为了便于说明，我们使用 $N=8$。所以，每等分为 $2\pi/8=\pi/4$。如果式(9-22)中的 d 等于 1，那么，旋转矢量 $\exp(j2\pi dn/N)$就等于 $\exp(jn\pi/4)$。因此，随着 n 从 0 变到 7，旋转矢量 $\exp(jn\pi/4)$围绕单位圆走过一周。如果式(9-22)中的 d 不等于 1，那么，旋转矢量的转速就会变快或变慢。当 $|m-k|=|d|<1$ 时，旋转矢量的转速就变慢；如果 $|(m-k)|=|d|>1$，旋转矢量的转速就加快。

我们先假定 $|d|<1$，比如 $m=2.5$(这是图 9-5 中的情况)，$k=2$，所以 $d=m-k=0.5$。可以根据式(9-22)画出旋转矢量随 n 的递增而旋转到的 8 个位置，如图 9-6 所示。由于 $d=0.5$，这 8 条矢量走过了上半个圆(d 起到了调节旋转速率的功能，$|d|<1$ 使转速变慢)。为了计算 $d=0.5$ 时的式(9-22)的累加值，可以先把图 9-6 中的这些矢量两两相加，然后再加在一起。比如，$v_0+v_7=0.390\angle 78.75°$，$v_1+v_6=1.111\angle 78.75°$，等等。这样就得到 4 个合矢量。因为幅角相同，所以只要把这 4 个合矢量的模相加就可以得到总的合成矢量的模，而合成矢量的幅角仍然是 78.75°。由此，我们可以方便地得到 $d=0.5$ 时的 8 条矢量累加和的模：

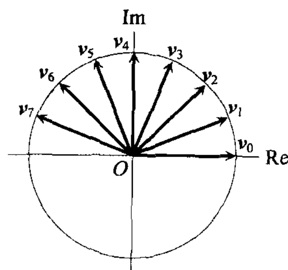


图 9-6　旋转矢量随 n 递增的 8 个位置，$d=m-k=0.5$

$$|v(d)|=|v(0.5)|=0.390+1.111+1.662+1.962=5.125 \tag{9-23}$$

所以，式(9-22)中的累加值 $v(d)=v(0.5)=5.125\angle 78.75°$。在 9.6 节整数基频的情况下，$d=m-k=0$，所以，8 条矢量重合于正实轴上，它们的合矢量的模就等于 8，即 $|v(0)|=8$。显然，$|v(0)|$为最大值，其他合矢量的模都小于 $|v(0)|$，比如，$|v(0.5)|<|v(0)|$。

由式(9-22)可知，如果 $d=m-k=-0.5$，那么图 9-6 中的 8 条矢量将以实轴为对称而折叠到下半个单位圆内。它们的合成复矢量就一定等于 $v(d)=v(-0.5)=5.125\angle -78.75°$。由此可知，$v(d)$的模是偶函数，而它的幅角是奇函数。因此，知道了 $d>0$ 的情况，也就知道了 $d<0$ 的情况。

在知道了 $v(d)$的具体合成过程之后，我们再来计算式(9-22)。式(9-22)中的 N 个复矢量是一个以 $\exp(j2\pi d/N)$为公比的等比数列，所以，这 N 个复矢量的合矢量为：

$$v(d)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi n}{N}d}=\frac{1-e^{j2\pi d}}{1-e^{j2\pi d/N}}=\frac{e^{-j\pi d}(e^{j\pi d}-e^{-j\pi d})}{e^{j\pi d/N}(e^{j\pi d/N}-e^{-j\pi d/N})}=e^{-j\pi d(N-1)/N}\frac{\sin(\pi d)}{\sin(\pi d/N)} \tag{9-24}$$

把式(9-24)代入式(9-21)之后，得到 DFT 的输出频谱：

$$X(k)=\frac{A_m}{2}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi d(N-1)/N}\frac{\sin(\pi d)}{\sin(\pi d/N)}\right\}=\frac{A_m}{2}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(m-k)(N-1)/N}\frac{\sin[\pi(m-k)]}{\sin[\pi(m-k)/N]}\right\} \quad (9\text{-}25)$$

其中，m 为 0 与 $N/2$ 之间的一个非整数（m 为整数时，上式也成立，这就是 9.6 节讨论的内容）。

式(9-24)和式(9-25)描述了 DFT 是如何把一个任意频率的复矢量信号 $x(n)$ 分配给每一个 $X(k)$ 的。式(9-24)右边的那个指数部分给出了把信号分配到每一个 $X(k)$ 的相位改变量。式(9-24)右边的两个正弦函数之比（近似于 sinc 函数）给出了把信号分配到每一个 $X(k)$ 的幅度改变因子。

我们把式(9-24)中的 $|v(d)|$ 与频率差 $d=m-k$ 之间的关系画在图 9-7 中（仍然使用 $N=8$）。由式(9-24)可知，$v(d)$ 与 $X(k)$ 一样是以 N 为周期循环的，所以只需画出从 $-N/2$ 到 $N/2$ 范围内的 $|v(d)|$，在本例中就是 4。此外，在图 9-7 中还标出了式(9-23)中 $m-k=0.5$ 时的计算结果：$|v(0.5)|=5.125$。

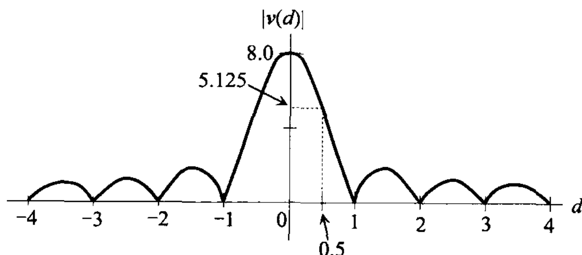


图 9-7　信号分配到 DFT 频率点时的幅度与频率差 d 的关系

有了图 9-7 的曲线，就可以计算出任何频率的信号被 DFT 分配到每个频率点上的幅度 $|X(k)|$。如果频率差 $d=m-k$ 等于一个整数，由图 9-7 可知，这个信号的幅度全部给了信号自己所在的那个 DFT 频率点。如果频率差 $d=m-k$ 为非整数，那么信号的频率位于 DFT 的两个相邻的频率点之间。这时，信号就要把自己的幅度分配给所有的 DFT 频率点，而分配的规则就是式(9-24)和式(9-25)以及图 9-7 中的曲线。

9.6 节和本节中的这些叙述旨在说明这样一个问题：当信号的频率为 DFT 基频整数倍（包括零频）时，DFT 的计算公式(9-6)是完全正确的。但当信号的频率不是 DFT 基频的整倍数时，计算公式(9-6)就把信号分配到了 DFT 的每一个频率点。其中，把信号分配给信号频率两侧的两个 DFT 频率点是正确的；把信号分配给信号频率两侧非常邻近的 DFT 频率点也是可接受的；但把信号分配给离开信号频率较远的那些 DFT 频率点，就引起了频谱的误差。我们把这样的频谱误差叫做“泄漏”。我们的目的是尽量减少 DFT 的“泄漏”。这是下面 9.9 节要讨论的问题。

9.8 DFT 的性质

在前面的讨论中，我们已经提到并使用了 DFT 的一些性质。本节将集中讨论

DFT 的几个主要性质。不难看出，DFT 的主要性质就是旋转矢量 W_N^{kn} 的性质。所以，首先讨论旋转矢量 W_N^{kn} 的性质。

旋转矢量的基本性质是它的周期性和对称性。它的周期性可以从图 9-3 中看出。因为 W_N^{kn} 是以幅角的 2π 倍为周期的，所以，当幅角到达 -2π（即 $-2\pi kn/N=-2\pi$，或者 $kn=N$）的时候，W_N^{kn} 就会因周期性而回到 1；然后，随着 k 和 n 的增加再重复一个周期。因此，当 $N=8$ 时，$W_8^8=W_8^0$，$W_8^{13}=W_8^5$，等等。

旋转矢量 W_N^{kn} 的另一个特性是它的对称性：旋转矢量是以幅角的 π 而奇对称的。比如，$W_8^4=-W_8^0$，$W_8^7=-W_8^3$ 等。这个周期性和对称性可以把众多的旋转矢量 W_N^{kn} 化简到最基本的一些矢量位置上。这是 DFT 的许多性质的根本所在，也是 FFT 快速算法的根本所在。

证明旋转矢量 W_N^{kn} 的周期性和对称性是很容易的。比如，W_N^{kn} 的周期性可以证明如下：

$$W_N^{kn+N}=e^{-j2\pi(kn+N)/N}=e^{-j2\pi kn/N}e^{-j2\pi}=e^{-j2\pi kn/N}=W_N^{kn} \tag{9-26}$$

利用同样的方法，可以证明旋转矢量 W_N^{kn} 的奇对称性：

$$W_N^{kn+N/2}=e^{-j2\pi(kn+N/2)/N}=e^{-j2\pi kn/N}e^{-j\pi}=e^{-j2\pi kn/N}\times(-1)=-W_N^{kn} \tag{9-27}$$

此外，我们也可以证明 W_N^{kn} 与 $W_N^{(N-k)n}$ 互为共轭复数：

$$W_N^{(N-k)n}=e^{-j2\pi}e^{j2\pi kn/N}=e^{j2\pi kn/N}=W_N^{-kn} \tag{9-28}$$

因为 W_N^{kn} 与 $W_N^{(N-k)n}$ 的幅角互为相反数，所以 W_N^{kn} 与 $W_N^{(N-k)n}$ 互为共轭。

9.8.1　线性叠加

DFT 的线性叠加性质可以表达为：

$$Ax(n)+By(n)\Leftrightarrow AX(k)+BY(k) \tag{9-29}$$

其中，A 和 B 为任意常数。式(9-29)可以叙述为：两个离散序列线性叠加后的序列的 DFT 等于这两个离散序列的 DFT 的线性叠加。这个性质可以容易地通过 DFT 的定义来证明。

9.8.2　时移定理

DFT 的时移定理可以表达为：

$$x(n-m)\Leftrightarrow X(k)W_N^{km} \tag{9-30}$$

上式的意思是，如果 DFT 的计算不是像通常那样从离散序列的第一个样点 $x(0)$ 开始，而是从 $x(-m)$ 开始，那么，与通常从 $x(0)$ 开始计算出来的 $X(k)$ 是不同的。这个不同点是要把 $X(k)$ 乘以 W_N^{km}，而因子 $W_N^{km}=\exp(-j2\pi km/N)$ 只是使 $X(k)$ 的相位有一个延迟；或者说，每一个 $X(k)$ 都有一个与 m 和 k 成正比的相位延迟。所以，时域中的时间延迟等价于频域中的相位延迟。此外，由于 DFT 中 $x(n)$ 的周期循环性，上面所说的 $x(-m)$ 显然是指 $x(N-m)$。

现在证明时移定理。我们从式(9-30)的左边开始，输入序列 $x(n-m)$ 的 DFT 可以

写为：

$$X_{tsh}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)W_N^{kn} \tag{9-31}$$

把其中的 W_N^{kn} 分解为两个因式 $W_N^{k(n-m)}$ 和 W_N^{km}。其中的 W_N^{km} 与 n 无关，可以提到连加号之前。这样之后，上式变为：

$$X_{tsh}(k) = W_N^{km} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)W_N^{k(n-m)} \tag{9-32}$$

因为 $x(n)$ 和 W_N^{kn} 是周期性循环的，所以，上式中的连加运算就是 $x(n)$ 的 DFT 变换 $X(k)$，并且与 m 的取值无关。我们用具体的数据来说明这一点。比如，使用 $N=8$ 和 $m=3$。这样之后，当 n 从 0 变到 7 的时候，式(9-32)的连加运算中的 8 个乘积项可以写为：

$$\begin{cases} x(-3)W_8^{-3k} \\ x(-2)W_8^{-2k} \\ x(-1)W_8^{-k} \\ x(0)W_8^0 \\ x(1)W_8^k \\ x(2)W_8^{2k} \\ x(3)W_8^{3k} \\ x(4)W_8^{4k} \end{cases} \tag{9-33}$$

由于 $x(n)$ 和 W_N^{kn} 都是以 $N=8$ 为周期而循环的，我们可以改写上式中的前三项，使式(9-33)变为：

$$\begin{cases} x(5)W_8^{5k} \\ x(6)W_8^{6k} \\ x(7)W_8^{7k} \\ x(0)W_8^0 \\ x(1)W_8^k \\ x(2)W_8^{2k} \\ x(3)W_8^{3k} \\ x(4)W_8^{4k} \end{cases} \tag{9-34}$$

显然，上式就是用 $x(n)$ 计算 $X(k)$ 时的 8 个乘积项。也就是说，式(9-32)中的连加运算的结果确实是 $X(k)$。

所以，由式(9-32)得到：

$$X_{tsh}(k) = X(k)W_N^{km} \tag{9-35}$$

这就证明了式(9-30)的时移定理。

9.8.3 频移定理

DFT 的频移定理可以表达为：

$$x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi mn}{N}} \Leftrightarrow X(k-m) \tag{9-36}$$

该式的意思是，对离散序列 $x(n)$ 乘以 $\exp(\mathrm{j}2\pi mn/N)$ 之后，它的 DFT 变换 $X(k)$ 就不同于原先的 $X(k)$。这个不同点是把原先的 $X(k)$ 进行 m 次循环右移。这是因为式(9-36)左边的因子 $\exp(\mathrm{j}2\pi nm/N)$ 表示了一个频率 m 倍于基频的单位复指数。用这个因子去乘 $x(n)$，就使 $x(n)$ 中的各个频率分量都有 m 倍于基频的频率增加，因此，它们对应的频谱 $X(k)$ 也要向高频方向有 m 次右移。我们的证明从式(9-36)的左边开始。

式(9-36)左边的 DFT 为：

$$X_{\mathrm{fsh}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi mn}{N}} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-mn} W_N^{kn} \tag{9-37}$$

把上式中的两个旋转矢量 W_N^{-mn} 和 W_N^{kn} 合并之后，式(9-37)变为：

$$X_{\mathrm{fsh}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k-m)n} \tag{9-38}$$

对上式使用变量代换 $k=k_1+m$ 之后，上式可以写为：

$$X_{\mathrm{fsh}}(k_1+m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{k_1 n} \tag{9-39}$$

在上式的右边，当 $k_1=0$ 时，我们得到 $X(0)$；当 $k_1=1$ 时，我们得到 $X(1)$；等等。所以，式(9-39)的右边就是 $x(n)$ 的 DFT 变换 $X(k_1)$。这样，式(9-39)可以改写为：

$$X_{\mathrm{fsh}}(k_1+m) = X(k_1) \tag{9-40}$$

把前面的变量代换再变回来，即用 $k_1=k-m$ 代入上式之后，上式变为：

$$X_{\mathrm{fsh}}(k) = X(k-m) \tag{9-41}$$

式(9-41)完全等于式(9-36)的右边，所以就证明了式(9-36)的频移定理。

9.8.4 循环卷积

在 4.4.4 节的卷积定理中，我们见到了两个离散序列的时域卷积。在连续时域中也有相似的情况，如图 8-15 中的时域卷积。这些卷积叫做线性卷积。但在 DFT 环境下，$x(n)$ 和 $X(k)$ 都是周期性循环的，所以两个离散序列之间的卷积就变为"循环卷积"。下面讨论在 DFT 中的循环卷积。

DFT 中的循环卷积的性质可表示为：

$$\sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m) \Leftrightarrow X(k)Y(k) \tag{9-42}$$

其中，左边的 n 和右边的 k 都是从 0 变到 $(N-1)$。上式的意思是，如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个 N 个样点的离散序列，而它们的 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$。那么，$X(k)$ 与 $Y(k)$ 相乘就等价于 $x(n)$ 和 $y(n)$ 之间的循环卷积。我们来证明式(9-42)。

在式(9-42)的左边，当 n 取 0 到 $(N-1)$ 中任何一个值的时候，就由连加运算计算

出一个卷积值。所以,这样的卷积值总共有 N 个。这 N 个卷积值就组成一个离散序列,我们把这个离散序列叫做 $u(n)$,并可以写为:

$$u(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y(n-m)\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

$u(n)$的 DFT 可以计算为:

$$U(k)=\sum_{n=0}^{N-1}u(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}[x(m)y(n-m)]W_N^{kn}\tag{9-43}$$

在交换了上式中的两个连加号、并把 W_N^{kn}拆成 $W_N^{k(n-m)}$和 W_N^{km}两个因式之后,式(9-43)变为:

$$U(k)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(m)y(n-m)W_N^{k(n-m)}W_N^{km}\tag{9-44}$$

上式中,对于后一个连加号,m 是常数;所以,可以把 $x(m)$提到两个连加号之间。这样之后,上式变为:

$$U(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\left\{\sum_{n=0}^{N-1}y(n-m)W_N^{k(n-m)}\right\}W_N^{km}\tag{9-45}$$

上式中,我们用了一个大括号;它的意思是,在式(9-44)的最后 3 项的连乘运算中,我们把 W_N^{km}作为公因子而提到了大括号之外。

在式(9-45)的大括号中,由于 $y(n-m)$和 $W_N^{k(n-m)}$都是以 N 为周期的,所以,无论 m 在 0 到$(N-1)$的范围内取什么值,大括号内的累加和总是等于 $Y(k)$。这已经在前面用式(9-33)和式(9-34)证明过了。因此,式(9-45)可以改写为:

$$U(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)Y(k)W_N^{km}\tag{9-46}$$

现在,$Y(k)$已经与 m 无关了,因而可以提到连加号之前。这样,式(9-46)变为:

$$U(k)=Y(k)\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}=X(k)Y(k)\tag{9-47}$$

这就证明了式(9-42)的循环卷积。

9.8.5 帕塞伐尔定理

DFT 中的帕塞伐尔定理可以表达为:

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2\tag{9-48}$$

该式的意思是:在 DFT 环境中,一个信号在时域中的功率与频域中的功率是相等的。

我们先用一个具体的序列来验证式(9-48)的正确性。假设 $N=8$,而且假设输入序列的 8 个样点都等于 1。因此,式(9-48)的左边等于 8。对于式(9-48)的右边,由于输入序列是一个直流信号,所以,它的 DFT 中只有 $X(0)$等于 8,其他的 $X(k)$都等于零,等式右边的连加运算就等于 64。在考虑到式(9-48)等号右边的 $1/N$ 之后,右边的计算结果就等于 8。所以,式(9-48)的两边是相等的。

对于帕塞伐尔定理的证明,主要是利用了 DFT 和 DFT 反变换以及旋转矢量的周期性和对称性。我们在下面给出其中的一种求证思路,并将这个定理的证明作为本章

的一道练习题。

为了便于证明，假设式(9-48)中的 $x(n)$为实数，所以，那个取绝对值符号可以去除。然后把 $x(n)$表示为 DFT 反变换。最后，还需要证明一个复数取模之后的平方等于这个复数与其共轭复数的乘积。

9.8.6 对称性

DFT 的对称性可以表示为下面 3 个表达式：

$$\begin{aligned}&(1)\ x(n)|_{\text{real}}\Leftrightarrow X(k)=X^*(N-k)\\&(2)\ x(n)|_{\text{even,real}}\Leftrightarrow X(k)|_{\text{even,real}}\\&(3)\ x(n)|_{\text{odd,real}}\Leftrightarrow X(k)|_{\text{odd,imag}}\end{aligned}\tag{9-49}$$

这 3 个表达式的意思依次为：(1)如果 $x(n)$为实数，那么 $X(k)$与 $X(N-k)$必定共轭；(2)如果 $x(n)$为偶对称实数，那么 $X(k)$也是偶对称实数[偶对称是指关于 $x(N/2)$或 $X(N/2)$的偶对称，$x(0)$与 $x(N/2)$以及 $X(0)$与 $X(N/2)$可以为任意值]；(3)如果 $x(n)$为奇对称实数，那么 $X(k)$是奇对称虚数[奇对称是指关于 $x(N/2)$或 $X(N/2)$的奇对称，而 $x(0)$与 $x(N/2)$以及 $X(0)$与 $X(N/2)$都必须为零]。这 3 个对称性都可以通过 DFT 的定义以及 W_N^{kn}的对称性和周期性来证明。我们在这里仅证明式(9-49)中的第三个对称性。

从式(9-49)(3)的左边开始，$x(n)$的 DFT 为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\tag{9-50}$$

因为 $x(n)$是奇对称的，所以 $x(0)$和 $x(N/2)$都等于零，而 $x(1)=-x(N-1)$，$x(2)=-x(N-2)$，…，因此，$X(0)$一定为零。对于 $X(N/2)$，DFT 计算中的旋转矢量为 $W_N^{nN/2}$，所以，旋转矢量随 n 的递增而反复地等于 1 和 -1；再根据 $x(n)$的奇对称性，$X(N/2)$就一定等于零。

对于其他的 $X(k)$，在把式(9-50)中奇对称的各项两两合并之后，可以得到：

$$X(k)=\sum_{n=1}^{(N/2)-1}x(n)\left[W_N^{kn}-W_N^{k(N-n)}\right]\tag{9-51}$$

根据本节开始时证明过的旋转矢量共轭性[式(9-28)]，式(9-51)中的 W_N^{kn}与 $W_N^{k(N-n)}$是互为共轭的，即两者的实部相等，虚部相反。所以，W_N^{kn}与 $W_N^{k(N-n)}$之差就一定是纯虚数，因此 $X(k)$也是纯虚数。此外，根据第一个对称性可知，$X(k)$与 $X(N-k)$是共轭的，而现在的 $X(k)$又都是纯虚数，所以，$X(k)=-X(N-k)$。

前面已经证明过了 $X(0)$和 $X(N/2)$都等于零，所以 $X(k)$就是奇对称的。这就证明了式(9-49)中的第三个对称性。

例 9-1 用单位脉冲序列验证 9.8.2 节的时移定理。

单位脉冲序列可以写为：

$$x(n)=\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n=1,2,\cdots,N-1\end{cases}\tag{9-52}$$

它的 DFT 为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{kn}=1 \qquad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

现在把单位脉冲序列 $\delta(n)$ 循环右移 m 个样点后，得到新的样点序列：

$$x_{\text{tsh}}(n)=\delta(n-m)=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

利用 9.8.2 节的时移定理，右移之后的序列的 DFT 可以写为：

$$X_0(k)=X(k)W_N^{km}=W_N^{km} \tag{9-53}$$

现在再用 DFT 的定义来计算右移后的序列 $x_{\text{tsh}}(n)$ 的 DFT：

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{tsh}}(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n-m)W_N^{kn} \tag{9-54}$$

在上式右边的 N 个乘积项中，只有 $n=m$ 的那个乘积项不为零，而相应的旋转矢量 $W_N^{kn}=W_N^{km}$。所以，上式的计算结果为：

$$X_1(k)=W_N^{km} \tag{9-55}$$

式(9-55)和式(9-53)的结果相等，也就验证了 9.8.2 节的时移定理。

9.9 窗函数的特性

在 9.7 节中，我们讨论了信号的频率不是基频整数倍时的泄漏效应。那里的 DFT 计算结果表示为式(9-24)和式(9-25)，其中，式(9-24)的 $v(d)$ 与式(9-25)的 $X(k)$ 只相差一个比例因子 $A_m/2$，并且我们还将 $|v(d)|$ 画成图 9-7 中的曲线。

如果把图 9-7 中的 $|v(d)|$ 曲线平移到 $X(k)$ 的图形中，并使 $|v(d)|$ 曲线的中心频率与信号频率相重合（现在假设信号频率 $m=1.75$），就可以得到图 9-8 中用虚线画出的这条 $|v(d)|$ 幅频曲线。这里，我们假设 $A_m/2=1$，所以，图中的 $|v(d)|$ 曲线和 $|X(k)|$ 曲线完全一样。图中非常容易地由 $|v(d)|$ 计算出了 $m=1.75$ 时的 8 个 $|X(k)|$。当 m 为其他值时，只要在水平方向上左右平移 $|v(d)|$ 曲线，就可以得到相应的 $|X(k)|$。

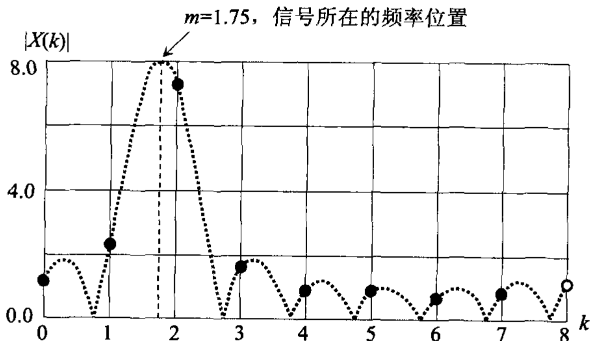


图 9-8 用式(9-25)计算出的 DFT 各频率点上的幅度，其中 $A_m=2, m=1.75$

那么，如何来减少图 9-8 中 $k=0$、3、4、5、6、7 的这些泄漏呢？首先，式(9-24)给我们指出了泄漏的原因，这就是式(9-24)右边的两个正弦函数之比，而这样两个正弦函数之比是由于我们使用了矩形窗。从矩形窗的形状来看(见图 9-11)，它的两端是突然截止的，因而产生了图 9-5 中两个 8 样点周期之间交接处的信号突变，并由此引起很大的频谱泄漏。我们设想，如果使窗函数的两端缓慢地趋于零，因而使图 9-5 中每个 8 样点周期的两端也比较平缓地趋于零，那么，在一个由 N 个样点组成的周期中的大部分样点仍然保持了原来信号的特征；而在两端的交接处，由于信号被衰减得非常小，由此产生的错误的频率分量也就非常小。这样的 DFT 的泄漏一定会很小。这就是窗函数的基本思路。在施加了两端呈缓慢趋于零的窗函数之后，图 9-5 中的信号 $x_2(n)$ 就变为图 9-9a 中的信号 $x_W(n)$。尤其是在实际应用中，N 一般都选择得比较大，所以，一个窗函数中可以包含许多个信号周期，这就变成了像图 9-9b 中那样的情况。图 9-9b 中的虚线表示了一个呈缓坡状趋于零的窗函数；所以，加窗后信号 $x_{WL}(n)$ 的大多数周期保持了原来的特性，而两端的波形突变的幅度又被窗函数大大缩小了。

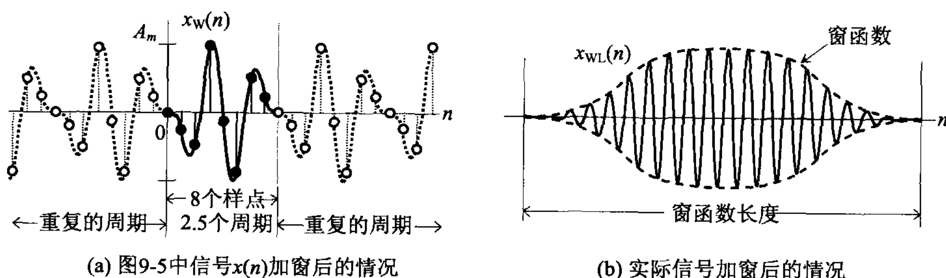


图 9-9 使用两端缓慢趋于零的窗函数，既保留了信号的特征又减少了两端的信号突变

由于窗函数是减小 DFT 泄漏的最有效的方法，我们将在下面分别讨论矩形窗、汉宁窗、汉明窗和布莱克曼窗这 4 个常用的窗函数，然后对这 4 个窗函数进行对比，找出适合具体应用的窗函数。

9.9.1 矩形窗

矩形窗被定义为：

$$w_{rect}(n) = 1 \qquad n = 0,1,2,\cdots,N-1 \qquad (9\text{-}56)$$

根据 z 变换的定义式(4-12)，矩形窗的 z 变换为：

$$W_{rect}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad (9\text{-}57)$$

从上式可知，矩形窗有 N 个零点，其中有一个零点在 $z=1$，并与分母中位于 $z=1$ 的那个极点互相抵消；其他的$(N-1)$个零点则均匀地分布在单位圆上，如图 9-10所示，图中 $N=16$。因为位于 $z=1$ 的一对零极点互相抵消，所以矩形窗有一个低通的特性。

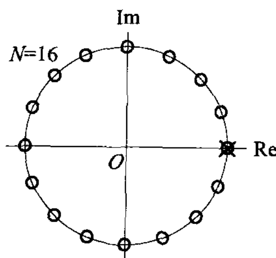


图 9-10 矩形窗的零极点位置

我们对矩形窗的 z 变换式(9-57)在单位圆上求值,就得到它的频率特性:

$$W_{\text{rect}}(e^{j\omega T})=\frac{1-e^{-jN\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}=\frac{e^{-jN\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2}}\cdot\frac{e^{jN\omega T/2}-e^{-jN\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}=e^{-j(N-1)\omega T/2}\cdot\frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \tag{9-58}$$

根据式(9-58),可以写出矩形窗的幅频特性:

$$|W_{\text{rect}}(e^{j\omega T})|=\left|\frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}\right| \tag{9-59}$$

正如本节前面所说的,矩形窗的幅频特性是两个正弦函数之比,与式(9-24)类似。当 ω 从 0 变到折叠频率 $\omega_S/2$ 时,分母中的正弦函数从 0 变到 1,使分式的值逐渐变小。与此同时,分子中正弦函数的角度以 N 倍于分母的速率而变化,使幅频特性出现 $N/2$ 个零值。整个分式呈现减幅振荡,它的幅频特性示于图 9-12 中。

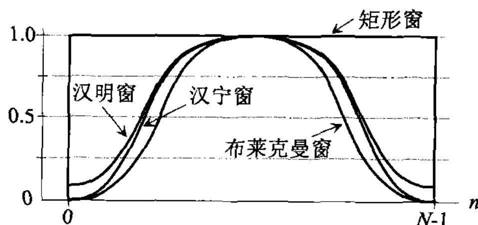


图 9-11 4 种最常用窗函数的形状

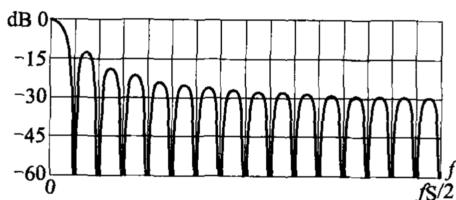


图 9-12 矩形窗的幅频特性,$N=32$

应该说明的是,在式(9-59)中,$\omega=0$ 时的幅度增益应该等于 N;但图 9-12 中的幅频特性是对于直流增益归一化的。图 9-13 至图 9-15 中的幅频特性也是对于直流增益归一化的。这是窗函数与滤波器不同的地方。

9.9.2 汉宁窗

汉宁窗是把余弦函数向上提升一个余弦函数的振幅而形成的,所以又叫升余弦窗。它的表达式为:

$$w_{\text{hann}}(n)=0.5-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-60}$$

汉宁窗是偶对称的,也就是 $w_{\text{hann}}(n)=w_{\text{hann}}(N-1-n)$,所以,它的频率特性可以表示为若干个余弦函数之和。为了便于说明,我们假设 $N=32$。因此,式(9-60)变为:

$$w_{\text{hann32}}(n)=0.5-0.5\cos(0.2027n)\qquad n=0,1,2,\cdots,31 \tag{9-61}$$

由上式可以写出汉宁窗的 z 变换:

$$\begin{aligned}W_{\text{hann32}}(z)&=\sum_{n=0}^{31}[0.5-0.5\cos(0.2027n)]z^{-n}\\&=\sum_{n=0}^{15}[0.5-0.5\cos(0.2027n)](z^{-n}+z^{-(31-n)})\end{aligned} \tag{9-62}$$

因此,汉宁窗的频率特性为:

$$W_{\text{hann32}}(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{15} [0.5 - 0.5\cos(0.2027n)](e^{-jn\omega T} + e^{-j(31-n)\omega T}) \tag{9-63}$$

上式右边的两个复指数在提取公因子 $\exp(-j31\omega T/2)$之后，就可以替换成余弦函数：

$$W_{\text{hann32}}(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{15} [0.5 - 0.5\cos(0.2027n)] \times 2.0e^{-j31\omega T/2}\cos[(31-2n)\omega T/2]$$

$$= e^{-j31\omega T/2}\sum_{n=0}^{15}[1.0 - \cos(0.2027n)]\cos[(31-2n)\omega T/2] \tag{9-64}$$

由上式可知，汉宁窗的幅频特性是由16个余弦函数叠加而成的，这就是：

$$|W_{\text{hann32}}(e^{j\omega T})| = \sum_{n=0}^{15}[1.0 - \cos(0.2027n)]\cos[(31-2n)\omega T/2] \tag{9-65}$$

利用式(9-65)就可以计算出 N=32 的汉宁窗的幅频特性。这个幅频特性示于图9-13中。

从上式可以扩展到N为任意值时的汉宁窗的幅频特性：

$$|W_{\text{hann}}(e^{j\omega T})| = \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[1.0 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\cos\left[(N-1-2n)\frac{\omega T}{2}\right] \tag{9-66}$$

9.9.3 汉明窗

汉明窗与汉宁窗都是用余弦函数构成的，所以很相似。它们的不同点是在窗函数的两端。汉宁窗的两端逐渐衰减到零，而汉明窗的两端逐渐衰减到满幅的0.08左右。汉明窗的表达式为：

$$w_{\text{hamm}}(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \qquad n = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-67}$$

使用推导汉宁窗幅频特性的相同方法，我们可以得到 $N=32$ 时的汉明窗幅频特性。它也是由16个余弦函数叠加而成的：

$$|W_{\text{hamm32}}(e^{j\omega T})| = \sum_{n=0}^{15}[1.08 - 0.92\cos(0.2027n)]\cos[(31-2n)\omega T/2] \tag{9-68}$$

利用式(9-68)可以计算出 $N=32$ 时的汉明窗的幅频特性。这个幅频特性示于图9-14中。

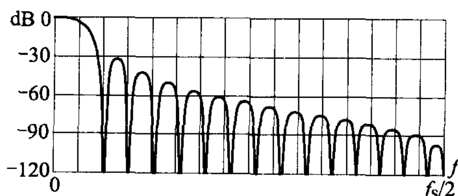


图9-13 汉宁窗的幅频特性，$N=32$

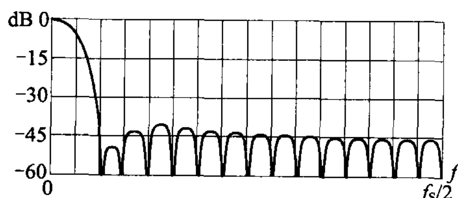


图9-14 汉明窗的幅频特性，$N=32$

从上式可以扩展到任意 N 值时的汉明窗的幅频特性：

$$|W_{\text{hamm}}(e^{j\omega T})| = \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[1.08-0.92\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\cos\left[(N-1-2n)\frac{\omega T}{2}\right] \tag{9-69}$$

9.9.4 布莱克曼窗

布莱克曼窗集合了汉宁窗和汉明窗的思路，这可以从布莱克曼窗的表达式中看出来：

$$w_{\text{black}}(n) = 0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{9-70}$$

由上式可知，$w_{\text{black}}(0)=0$ 和 $w_{\text{black}}(N-1)=0$，所以，布莱克曼窗的两端是趋于零的。

使用推导汉宁窗和汉明窗幅频特性的相同方法，我们可以得到 $N=32$ 时的布莱克曼窗的幅频特性。它由 32 个余弦函数叠加而成：

$$|W_{\text{black32}}(e^{j\omega T})| = \sum_{n=0}^{15}[0.84-\cos(0.2027n)+0.16\cos(0.4054n)]\cos[(31-2n)\omega T/2] \tag{9-71}$$

利用式(9-71)，可以计算出 $N=32$ 时的布莱克曼窗的幅频特性。这个幅频特性示于图 9-15中。

从上式可以扩展到任意 N 值时的布莱克曼窗的幅频特性：

$$|W_{\text{black}}(e^{j\omega T})| = \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[0.84-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.16\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right]\cos\left[(N-1-2n)\frac{\omega T}{2}\right] \tag{9-72}$$

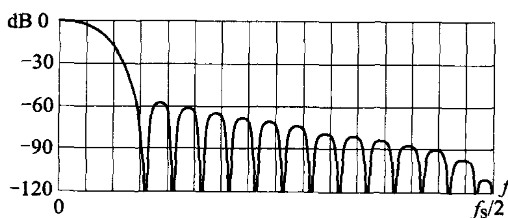


图 9-15 布莱克曼窗的幅频特性，$N=32$

9.10 窗函数的比较

对窗函数的比较，就是比较它们降低 DFT 泄漏的能力。在本节中，我们将说明窗函数的功能表现为窗函数频谱与信号频谱之间的循环卷积，并通过这个循环卷积达到降泄漏的目的。在这之后，我们将通过一个非常接近实际的频谱测试方法，对 4

个窗函数的降泄漏功能进行比较。最后，根据比较的结果，给出窗函数选择的一些建议。

9.10.1　窗函数引起频谱的循环卷积

我们现在来讨论窗函数如何修改信号的 DFT 频谱。窗函数与输入序列 $x(n)$是相乘的关系，这正好与 9.8.4 节的情况成对偶。所以，我们可以预期，两个输入序列相乘的 DFT 应该对应于这两个序列 DFT 的循环卷积。情况确实如此，而且有：

$$x(n)y(n)\Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l)Y(k-l) \tag{9-73}$$

上式中，如果把 $x(n)$看作输入序列，把 $y(n)$看作窗函数序列，那么等式右边的卷积运算就是输入序列 $x(n)$加窗之后的 DFT。

下面解释式(9-73)。为了便于说明，假设 $N=4$，并用 $u(n)$表示式(9-73)左边的 $x(n)y(n)$，因而 $U(k)$就是 $x(n)y(n)$的 DFT；再用 $V(k)$表示式(9-73)的右边。我们先来看 $k=0$ 时的 $U(0)$和 $V(0)$。

由式(9-73)的左边得到：

$$U(0)=x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+x(3)y(3) \tag{9-74}$$

把式(9-73)右边的 $X(l)$和 $Y(k-l)$替换成 DFT 计算式(9-6)。这样，式(9-73)右边变为：

$$V(0)=\frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} X(l)Y(-l)=\frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3}\left[\sum_{n=0}^{3} x(n)W_4^{ln}\right]\left[\sum_{n=0}^{3} y(n)W_4^{-ln}\right] \tag{9-75}$$

把上式右边两个方括号的相乘展开之后，可以得到 16 项。我们把 n 等于 0、1、2、3 的 4 个乘积项放在前面的方括号中，把其他的 12 个乘积项放在后面的方括号中，就得到下面的形式：

$$V(0)=\frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3}\{[x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+x(3)y(3)]+[x(0)y(1)W_4^{-l}+\cdots]\} \tag{9-76}$$

由于连加运算的 l 是从 0 变到 3 的，后面那个方括号中的各项将互相抵消，累加值一定为零。因此，上式变为：

$$V(0)=x(0)y(0)+x(1)y(1)+x(2)y(2)+x(3)y(3) \tag{9-77}$$

这就验证了当 $k=0$ 时式(9-73)的正确性。

对于 $k=1$、2、3 的情况，我们同样可以验证式(9-73)的正确性。比如当 $k=3$ 时，式(9-74)变为：

$$U(3)=x(0)y(0)+x(1)y(1)W_4^{3}+x(2)y(2)W_4^{6}+x(3)y(3)W_4^{9} \tag{9-78}$$

而式(9-75)变为：

$$V(3)=\frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} X(l)Y(3-l)=\frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3}\left[\sum_{n=0}^{3} x(n)W_4^{ln}\right]\left[\sum_{n=0}^{3} y(n)W_4^{3n}W_4^{-ln}\right]$$

上式中对 $Y(3-l)$使用了 9.8.3 节的频移定理。

相应地，式(9-77)就变为：

$$V(3)=x(0)y(0)+x(1)y(1)W_4^3+x(2)y(2)W_4^6+x(3)y(3)W_4^9 \quad (9\text{-}79)$$

因此，$U(3)=V(3)$。这就验证了式(9-73)对所有的 k 值都是正确的。通过上面的验证，我们实际上也已经证明了式(9-73)：在 DFT 中，两个输入序列的相乘意味着这两个输入序列的 DFT 的循环卷积。

9.10.2 循环卷积的计算过程

由上一节知道，窗函数对信号频谱的修改是通过两者频谱的循环卷积实现的。这一节将具体说明这样的循环卷积实际上是如何完成的。仍然使用 $N=8$，并使用式(9-17)中的复指数信号，但我们可以随意变动一下这个复指数信号的频率，比如把 m 从 1.75 变为 1.5。这是很简单的，只要在图 9-8 中把曲线循环左移 0.25 个 DFT 基频。这个 $m=1.5$ 的复指数信号的 DFT 幅度谱现在被示于图 9-16 中。下面用矩形窗来说明式(9-73)右边的卷积是如何进行的。

$N=8$，矩形窗的 DFT 可以表示为：

$$Y_{\text{rect8}}(k)=\sum_{n=0}^{7}W_8^{kn} \quad (9\text{-}80)$$

由旋转矢量 W_8^{kn} 的对称性和周期性可知，仅当 $k=0$ 时，$Y_{\text{rect8}}(k)$ 才等于 8；当 k 为其他值时，一概为零。在对 $Y_{\text{rect8}}(k)$ 进行归一化之后，我们得到了图 9-17 中的矩形窗频谱。

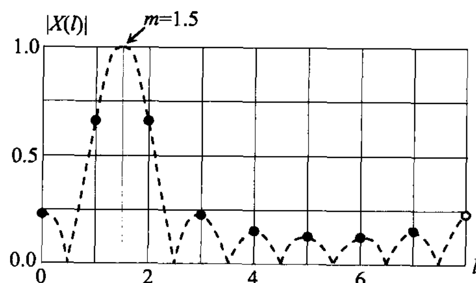


图 9-16 一个复指数信号的幅度谱，$m=1.5$，$N=8$

这里需要对矩形窗的 DFT 式(9-80)和 9.9.1 节中的矩形窗频率特性式(9-58)之间的关系做一个说明。首先，9.9.1 节中对矩形窗频率特性的分析是在通常的离散时域中进行的，所以频率是连续的；而式(9-80)所表示的是矩形窗的 DFT，它在频率上是离散的，只在 8 个频率点上才有频谱值。但是，如果对 9.9.1 节中的式(9-58)计算出它在单位圆 N 等分的那些频率点上的值，也可以得到与式(9-80)相同的结果；或者说，对式(9-58)在 N 等分的频率点上进行“采样”，

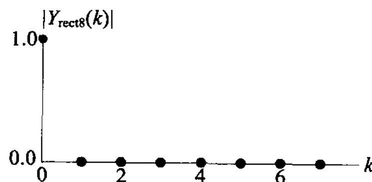


图 9-17 矩形窗的 DFT，$N=8$

就得到式(9-80)的结果。因此,从图 9-12 到图 9-15 的 4 个窗函数的频率特性也完全确定了相应窗函数的 DFT 频谱。此外,从功能上看,式(9-58)被用作一般离散时域的窗函数特性,比如,用于 7.4.2 节窗函数法 FIR 滤波器的设计等;而式(9-80)则用于 DFT 频谱的降泄漏。上面的说明对于其他的窗函数也同样适用。

现在把图 9-16 中的信号幅度谱与图 9-17 中矩形窗的幅度谱做循环卷积。循环卷积有两种做法,我们的做法是固定信号的频谱,移动窗函数的频谱,如图 9-18 所示。图中的 $|X(l)|$ 就是图 9-16 中的复指数信号的幅度谱。对于图 9-17 中的矩形窗的幅度谱,首先要按水平轴逆转,再把逆转后的幅度谱向右侧循环延伸一倍(循环卷积就是靠这个延伸一倍实现的),然后放入图 9-18 中。这样之后,我们就可以移动这个幅度谱,使它的纵坐标依次与 $|X(l)|$ 的 $l=0\sim l=7$ 对准,这就是图中的 $|Y_{\text{rect8}}(k-l)|$。在每次对准后,计算出所有 8 个频率点上的累加和,就可以得到一个循环卷积。图 9-18 中的 $k=3$,所以正在计算 $V(3)$。

由图 9-18 可知,这个循环卷积得到的结果一定是与图 9-16 中信号原来的幅度谱完全一样的。这就是说,加矩形窗不会改变原来信号的频谱。原因很简单,因为图 9-18中的矩形窗的幅度谱只在 $k-l=0$ 时等于 1,在其他 7 个频率点上都等于零。所以,每个循环卷积的 8 个乘积项中,只有一个乘积项不为零。

这使我们想起一个重要问题:因为选用了矩形窗,所以在循环卷积中没有出现复数相加的情况,因此,图 9-18 中循环卷积的计算方法是正确的。但是,如果选用其他的窗函数,比如选用图 9-19 中的汉宁窗,那么,每个循环卷积中的 8 个乘积项中会有多个不等于零。根据式(9-73)右边的连加运算,这些不等于零的乘积项应该使用复数相加的方法。像图 9-18 中那样简单地使用模相加的计算方法一定会引入误差,所以,图 9-18只能看作示意性的,或用作近似估算。但循环卷积的计算方法本身是正确的,它的问题是计算起来太复杂。我们将在下面用另一种简单的计算方法来分析 4 个窗函数的降泄漏能力。

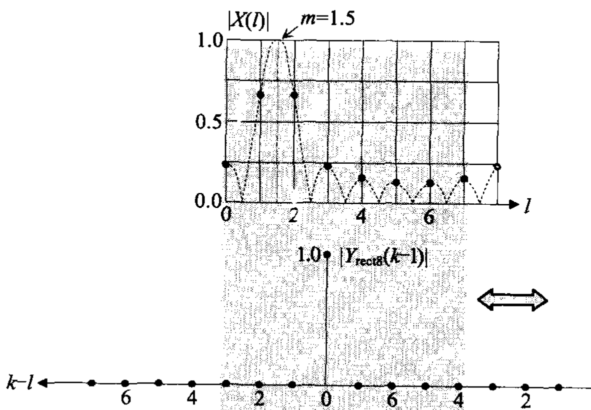


图 9-18　窗函数幅度谱与信号幅度谱之间的循环卷积

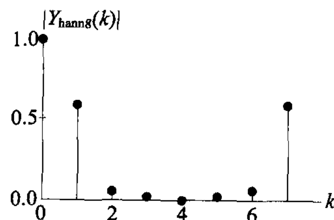


图 9-19　汉宁窗的 DFT,$N=8$

9.10.3 通过频谱测试比较窗函数的泄漏

这一节中，我们将通过一个测试来比较不同窗函数的降泄漏能力，而使用的计算方法是式(9-73)的左边，即直接用序列的相乘来计算 DFT，因而不需要使用麻烦的卷积。测试采用了图 9-20 中的流程。它的操作顺序是：选择一个余弦信号，使它的频率位于 DFT 的两个相邻频率点之间的中点。在图 9-20 中，这个频率选择为采样频率的 0.178604。然后用不同的窗函数对这个余弦信号截取 N 点，做 DFT 计算。对于 DFT 的 N 个输出 $X(k)$，确定出哪些属于信号、哪些属于泄漏(确定的规则在下面说明)，并以此计算出信号功率和泄漏功率。而泄漏功率与总功率(信号功率和泄漏功率之和)之比就用作窗函数泄漏的度量。因为这里使用了余弦信号作为 DFT 的输入，所以这个测试方法非常接近于实际使用 DFT 进行谱分析的情况。整个测试是用 C 代码完成的，而且用 FFT 代替了 DFT。

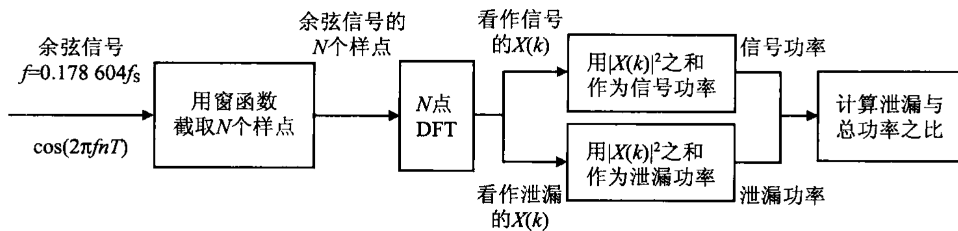


图 9-20 窗函数泄漏的测试流程

测试中的一个重要参数是 DFT 的点数 N，我们选择 8、64、512、4096 和 32 768。对于 DFT 输出频谱的信号与泄漏的区分，采用比较接近实际的做法：对于 8 点 DFT，选择信号频率两侧各 1 个 $X(k)$ 作为信号，即 $X(1)$ 和 $X(2)$，其他 6 个 $X(k)$ 都认为是泄漏。对于 64 点 DFT，选择信号频率两侧各 3 个 $X(k)$ 作为信号，其余为泄漏。对于 512 点、4096 点和 32 768 点 DFT，则分别选择信号频率两侧各 5 个、7 个、9 个 $X(k)$ 作为信号，其余为泄漏。我们用这个测试流程对 4 个窗函数进行了测试。测试所得到的泄漏功率与总功率之比以分贝为单位，表示在图 9-21 中。

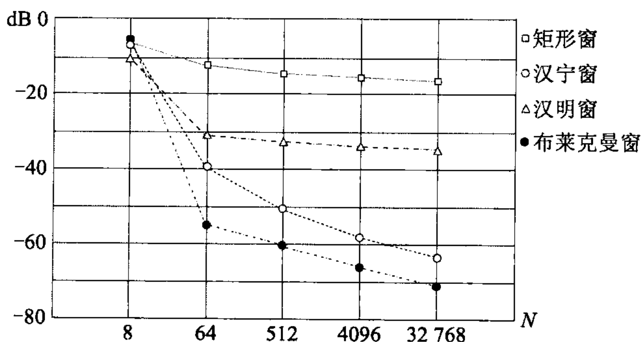


图 9-21 4 种窗函数的降泄漏能力的比较

由于加矩形窗等于没有加窗函数，所以，窗函数降泄漏的比较可以用矩形窗作为参照。由图9-21可知，这4个窗函数的降泄漏能力依次为布莱克曼窗、汉宁窗、汉明窗、矩形窗。而且，它们的降泄漏能力都可以用图9-12至图9-15中的窗函数幅频特性来解释。

在图9-15中，布莱克曼窗的第一个旁瓣下降到了接近−60 dB，而且在这之后又很快降到−80 dB与−90 dB之间。这说明，布莱克曼窗把它的能量的绝大部分集中在它的主瓣中。因此，当它的频谱与信号频谱做循环卷积的时候，就把信号的绝大部分功率保持在了信号频率两侧的、等于布莱克曼窗主瓣宽度的频率范围内。布莱克曼窗的主瓣宽度为矩形窗的3倍，即3个频率点的宽度，所以，当$N=64$而选取信号频率两侧各3个频率点为信号功率的时候，实际上就把几乎所有的信号功率包含在了这个频率范围内。这在图9-21中表现为当$N=64$时，泄漏很快降到大约−55 dB。当N继续增加时，泄漏还在进一步减少，这是因为布莱克曼窗的旁瓣也还在不断下降。

汉宁窗的情况与布莱克曼窗比较相似。当N从8点增加到64点时，汉宁窗的泄漏也很快下降到接近−40 dB。其原因是与布莱克曼窗相同的，即信号频率两侧的3个频率点几乎包含了信号的全部功率。此外，图9-13中的汉宁窗的幅频特性从第一个旁瓣开始的下降速度超过了布莱克曼窗的速度，所以，在图9-21中，汉宁窗表现出了比布莱克曼窗较快的泄漏下降趋势。汉宁窗的优点是主瓣只有大约两个频率点的宽度，虽然降泄漏能力没有布莱克曼窗那样好。

汉明窗的降泄漏能力不像布莱克曼窗和汉宁窗那样好，这可以从图9-14中看出。图中的汉明窗的幅频特性几乎一直维持在−40 dB与−45 dB之间，表现在图9-21中就是从$N=64$到$N=32\ 768$之间的泄漏几乎呈水平线。汉明窗的最大特点是它的第一个旁瓣下降到了−47 dB，但由于它在主瓣内的平均增益小于汉宁窗的增益，所以，主瓣中包含的能量要小于汉宁窗。反映在图9-21中就是，当$N=64$时，泄漏仍然大于汉宁窗。

最后需要说明的是，上面对DFT输出频谱中的信号与泄漏的划分(即信号频率两侧的频率点数)，对于图9-21中的数据是有一定影响的，但这种影响不是很大。我们对信号与泄漏的划分进行一些改动后，图9-21中4个窗函数的降泄漏趋势基本不变。这也证实了本节的测试结果与前面讨论的频谱卷积的一致性，因而也指出了选择窗函数时的一个考虑要点：信号频谱与窗函数频率特性之间的循环卷积会是什么样的结果。

9.10.4 窗函数的主要特性

我们已经在上面用到了窗函数的一些主要特性。本节只是对这些特性做一个归纳。

窗函数的一个主要指标是它的主瓣面积，也就是，窗函数应该把它的尽可能多的能量集中到主瓣内。这就要求主瓣有一定的宽度，并且主瓣内有尽可能高的增益，如

布莱克曼窗那样。但另一方面，为了提高频谱的分辨率，主瓣的宽度应该尽量窄，比如矩形窗，它的主瓣宽度等于 f_S/N（见图 9-12），只有一个频率点的宽度。

对窗函数的另一个要求是旁瓣应该尽量低。比如，汉明窗的最大旁瓣只有 -43 dB（见图 9-14），而布莱克曼窗的最大旁瓣更小。此外，第一和第二旁瓣的高度也应该尽量低。比如，汉明窗的第一个旁瓣下降到了 -50 dB（见图 9-14），而汉宁窗的第一个旁瓣只有 -31 dB（见图 9-13）。窗函数的这些特性是互相牵制的，所以在选择窗函数时，需要对这些特性做恰当的权衡。

9.10.5 如何选用窗函数

综上所述，我们给出窗函数选择的一些建议。

- 窗函数的长度 N 必须充分大。
- 如果被分析的信号中只有少数几个频率分量，而且这些分量的频率也比较分散，就可以使用汉宁窗或布莱克曼窗。
- 如果信号中的许多频率分量之间非常接近，就可以使用汉明窗。
- 如果事先可以随意选用信号频率，比如混合信号电路测试时，就可以使用矩形窗。
- 在计算信噪比时，可以根据信号的具体情况以及所用的窗函数，把信号频率两侧的几个 $X(k)$ 归入信号功率。
- 在发现谱分析结果不正常时应当考虑的两个问题是：N 是否选得充分大，窗函数是否选得恰当。

小结

- DFT 类似于在连续时域中把周期函数展开为傅里叶级数。
- 在 DFT 环境下，输入离散序列 $x(n)$ 与它的 DFT 输出 $X(k)$ 都是以 N 为周期而循环的。
- DFT 所完成的事情是从 N 个离散样点 $x(n)$ 计算出 N 个离散频率点上的谱分量 $X(k)$；这些频率点是 DFT 基频的整数倍，而 DFT 的基频 $\omega_0 = 2\pi/(NT)$，或者 $\omega_0 = \omega_S/N$。
- 如果离散序列 $x(n)$ 是实数，那么 $X(k)$ 是关于折叠频率互为共轭的。这就是说，对于实数的 $x(n)$，频谱 $X(k)$ 中只有一半是有效的，另一半是重复的。
- DFT 和 FFT 中最基本的元素是旋转因子 W_N 和旋转矢量 W_N^{kn}。
- 旋转矢量 W_N^{kn} 具有正交性、周期性和对称性。
- DFT 的一个主要问题是"泄漏"，而泄漏的根本原因是我们无法知道离散序列的实际周期。相比之下，连续时域中的傅里叶级数展开是没有泄漏的，因为我们事先知道了信号的频率。但从根本上讲，连续时域的傅里叶级数展开只是一种

理论分析方法，而DFT和FFT是应用于实时计算的。

□恰当选择窗函数是减少泄漏的最有效方法，而汉宁窗是比较最常用的方法。

习题

9.1　计算下列离散序列的8点DFT：

(1) $x(n)=\delta(n-3), n=0,1,2,\cdots,7$。

(2) $x(n)=\sin(n\pi/4), n=0,1,2,\cdots,7$。

9.2　利用复指数信号的方法，计算下面信号的8点DFT。

(1) $x(n)=\cos(n\pi/4),\ n=0,1,2,\cdots,7$。

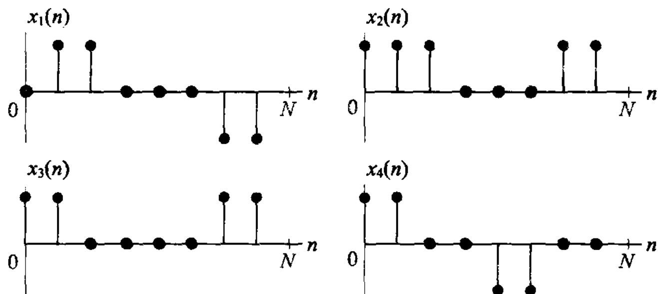
(2) $x(n)=\sin(n\pi/2),\ n=0,1,2,\cdots,7$。

9.3　在下面4个离散序列中，

(1) 哪个序列得到实数的DFT?

(2) 哪个序列得到虚数的DFT?

(3) 哪些序列的$X(0)=0$?



9.4　试证明DFT的线性叠加性质。

9.5　试证明等式(9-49)中的(1)与(2)：

(1) $x(n)|_{\text{real}} \Leftrightarrow X(k)=X^*(N-k)$

(2) $x(n)|_{\text{even/real}} \Leftrightarrow X(k)|_{\text{even/real}}$

9.6　试证明DFT中的帕塞伐尔定理(9-48)。

9.7　证明式(9-73)：两个DFT输入序列的相乘意味着这两个序列的DFT的循环卷积。

第 10 章 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换(FFT)是 DFT 的快速算法。它有两种实现方法:时域抽取法和频域抽取法。FFT 算法的最根本的思路是"分而治之"。比如,要计算一个 8 点 DFT,就把它分解成 2 个 4 点 DFT,再进而分解成 4 个 2 点 DFT。所以,FFT 算法最基本的计算单位是 2 点 DFT。这里只讨论"基 2"FFT,所以,FFT 的点数 N 一定是 2 的整次幂。其他基数 FFT 的算法在原理上是一样的。

为了便于说明,这里的 FFT 算法分析中使用 $N=8$,所以我们的目标是计算 8 点 FFT。本章最后将说明超过 8 点的 FFT 算法。

10.1 时域抽取 FFT 算法

在选择了 $N=8$ 之后,式(9-6)的 DFT 计算公式变为:

$$\begin{aligned}X(k) &= \sum_{n=0}^{7} x(n)W_8^{kn} \\ &= x(0)+x(1)W_8^k+x(2)W_8^{2k}+\cdots+x(7)W_8^{7k} \qquad k=0,1,2,\cdots,7 \qquad (10\text{-}1)\end{aligned}$$

10.1.1 把 $X(k)$分解为 2 个 4 点 DFT

在时域抽取算法中,首先把式(10-1)中的 8 个累加项按照 n 分为偶数项和奇数项的两组:

$$X(k)=\sum_{m=0}^{3} x(2m)W_8^{2mk}+\sum_{m=0}^{3} x(2m+1)W_8^{(2m+1)k} \qquad k=0,1,\cdots,7 \qquad (10\text{-}2)$$

上式中,后一个连加运算中有一个因子 W_8^k 与 m 无关,可以提到连加号之前。这样,上式可以改写为:

$$X(k)=\sum_{m=0}^{3} x(2m)W_8^{2mk}+W_8^k\sum_{m=0}^{3} x(2m+1)W_8^{2mk} \qquad k=0,1,\cdots,7 \qquad (10\text{-}3)$$

式(10-3)的意思是,一个像式(10-1)那样的 $X(k)$计算式可以分解为两个连加运算,其中的每个连加运算都是 4 个 $x(n)$与 4 个 W_8^{2mk} 乘积的累加。根据式(9-6)观察式(10-3),并注意到 $W_8^{2mk}=W_4^{mk}$之后,式(10-3)中的 2 个连加运算就是 2 个 4 点 DFT。因此,式(10-3)已经把一个 8 点 DFT 分解成了 2 个 4 点 DFT。在这 2 个连加运算中,

旋转矢量是完全相同的，但它们的 $x(2m)$ 和 $x(2m+1)$ 分别是输入序列 $x(n)$ 中的偶数样点和奇数样点。把 $x(n)$ 按照偶数与奇数分为两组，实际上就是在时域中每隔一个样点提取一个样点，这就是被叫做"时域抽取法"的原因。

在上面的叙述中，有一个问题还没有解释。在式(10-3)中，2个4点DFT中的 m 从0变到3。按照式(9-6)或式(10-1)的规定，旋转矢量 W_8^{2mk} 中的 k 应该有相同的递增范围；这就是，k 也应该从0变到3。但在式(10-3)中，k 却是从0变到7，其中受牵连的是2个4点DFT中的旋转矢量 W_8^{2mk}。

我们这样来回答这个问题：首先，当 $k=0、1、2、3$ 时，式(10-3)中的旋转矢量 W_8^{2mk}（即 W_4^{mk}）对于计算4点DFT是正确的。当 $k=4、5、6、7$ 时，由于周期性的原因，式(10-3)中的旋转矢量 W_8^{2mk} 的值分别等于 $k=0、1、2、3$ 时的值。比如当 $k=6$ 时，式(10-3)中的旋转矢量 W_8^{2mk} 为：

$$W_8^{2mk}\big|_{k=6}=W_8^{12m}=W_8^{8m}W_8^{4m}=W_8^{4m}=W_8^{2mk}\big|_{k=2} \tag{10-4}$$

所以，式(10-3)中的4点DFT计算是正确的。

10.1.2 把 $X(k)$ 分解为4个2点DFT

时域抽取操作可以一直继续下去，直到2点DFT为止。为此，我们把式(10-3)中的两个连加运算再分别按照 $m=0、2$ 和 $m=1、3$ 分为两组。这样，式(10-3)就可以分解为：

$$\begin{aligned}X(k)=&\left\{[x(0)W_8^0+x(4)W_8^{4k}]+[x(2)W_8^{2k}+x(6)W_8^{6k}]\right\}\\&+W_8^k\left\{[x(1)W_8^0+x(5)W_8^{4k}]+[x(3)W_8^{2k}+x(7)W_8^{6k}]\right\}\\&k=0,1,\cdots,7\end{aligned} \tag{10-5}$$

上式中，在每个大括号的第二个方括号内的两项都可以提取公因子 W_8^{2k}。这样之后，上式变为：

$$\begin{aligned}X(k)=&\left\{[x(0)W_8^0+x(4)W_8^{4k}]+W_8^{2k}[x(2)W_8^0+x(6)W_8^{4k}]\right\}\\&+W_8^k\left\{[x(1)W_8^0+x(5)W_8^{4k}]+W_8^{2k}[x(3)W_8^0+x(7)W_8^{4k}]\right\}\\&k=0,1,\cdots,7\end{aligned} \tag{10-6}$$

在上式中的每个方括号内，W_8^0 可以写为 W_2^0，W_8^{4k} 可以写为 W_2^k。所以，上式中每个方括号内的两项都构成了一个2点DFT。因此，式(10-6)是8点DFT在采用时域抽取法时的最终表达式：一个8点DFT被分解成了4个2点DFT。

从式(10-6)也可以看出，在把4点DFT分解为2点DFT的过程中，信号 $x(n)$ 被再次每隔一个样点抽取一个样点。因此，$x(n)$ 的8个样点现在被分为下面的4组：

$$x(n)\Rightarrow\left\{[x(0),x(4)],[x(1),x(5)],[x(2),x(6)],[x(3),x(7)]\right\} \tag{10-7}$$

所以，式(10-6)中4个方括号内的4对样点是被4∶1时域抽取的结果。

10.1.3 DFT 的分析与综合

前面 10.1.1 节与 10.1.2 节的推导过程可以被叫做“分析”，因为通过式(10-3)和式(10-6)把一个 8 点 DFT 分解成了 4 个 2 点 DFT。

我们下面要做的是所谓的“综合”，即如何通过 2 点 DFT 合成出 4 点 DFT，再由 4 点 DFT 合成出 8 点 DFT。“综合”过程中主要考虑的，是如何使合成出的 2 点 DFT 和 4 点 DFT 为更多的 $X(k)$所共用。

10.1.4 用 4 个 2 点 DFT 合成 $X(k)$

我们先把式(10-6)中每个方括号变为一个 2 点 DFT。由式(10-6)可知，每个方括号内的旋转矢量 W_8^{4k}是随 k 而旋转的。旋转矢量 W_8^{4k}是以 $4k=8$ 为周期的，所以旋转矢量只产生两个值：当 k 为偶数时，$W_8^{4k}=1$；当 k 为奇数时，$W_8^{4k}=-1$。其结果是，W_8^{4k}随 k 的递增而交替地等于 1 与 -1。这样，式(10-6)中每个方括号只产生 2 个不同的值，因此，4 个方括号总共产生 8 个中间值，而不是因为 k 从 0 变到 7 而产生$4\times8=32$个中间值。我们把这 8 个中间值简洁地表示为 8 个 A 两项式；与此同时，k 也就被分为偶数和奇数的两组：

$$\begin{cases} A_0(0,4) = x(0) + x(4) \\ A_0(1,5) = x(1) + x(5) \\ A_0(2,6) = x(2) + x(6) \\ A_0(3,7) = x(3) + x(7) \end{cases} \quad k = 0,2,4,6 \tag{10-8}$$

$$\begin{cases} A_4(0,4) = x(0) - x(4) \\ A_4(1,5) = x(1) - x(5) \\ A_4(2,6) = x(2) - x(6) \\ A_4(3,7) = x(3) - x(7) \end{cases} \quad k = 1,3,5,7 \tag{10-9}$$

其中，A 的下标 0 或 4 表示右边两项式之间的加减号，也是指式(10-6)每个方括号中的后一个旋转矢量等于 W_8^0或 W_8^4，即 1 或 -1。A 两项式括号中的两个数字分别为 $x(n)$的两个序号。这样，我们用 $x(n)$的 8 个样点组成了 8 个 A 两项式，也就完成了 8 点 FFT 算法的总共三步运算中的第一步，这就是图 10-1 中的第一步。此外，我们在式(10-8)和式(10-9)中可以容易地找出 4 对 2 点 DFT，比如 $A_0(0,4)$与 $A_4(0,4)$就是其中的一对，而且是由输入样点 $x(0)$与 $x(4)$组成的。

现在，式(10-6)可以用 A 两项式表示为：

$$X(k) = [A_0(0,4) + W_8^{2k}A_0(2,6)] + W_8^k[A_0(1,5) + W_8^{2k}A_0(3,7)] \quad k = 0,2,4,6 \tag{10-10}$$

$$X(k) = [A_4(0,4) + W_8^{2k}A_4(2,6)] + W_8^k[A_4(1,5) + W_8^{2k}A_4(3,7)] \quad k = 1,3,5,7 \tag{10-11}$$

式(10-10)和式(10-11)中的每一个 $X(k)$现在都是用 4 个 2 点 DFT(即 A 两项式)合成的。

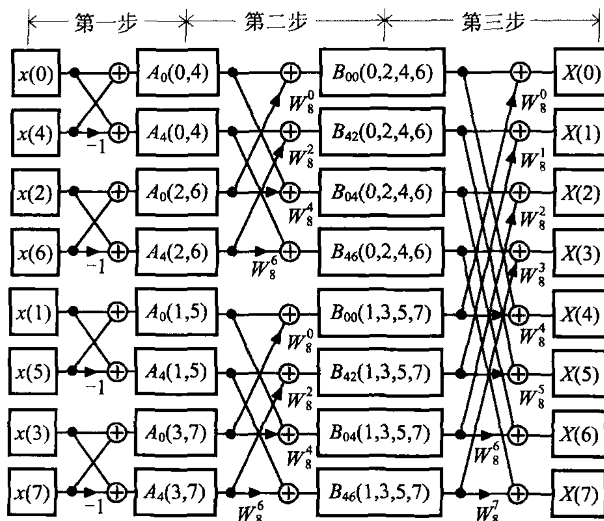


图10-1　时域抽取8点FFT算法用三步完成

10.1.5　用2个4点DFT合成 $X(k)$

由式(10-10)和式(10-11)可以看出,第二步要做的事是把这两个等式中的每个方括号内的两项相加为一项。可以发现,第一步中式(10-6)方括号内的后一个旋转矢量是 W_8^{4k},所以随着 k 的递增,它的值是交替的 W_8^0 和 W_8^4,因而可以按照 k 的偶数与奇数来结合。现在方括号内的这个旋转矢量是 W_8^{2k},所以随着 k 的递增,它的值分别为 W_8^0、W_8^2、W_8^4、W_8^6,也就是交替地等于1、W_8^2、-1 和 $-W_8^2$。所以,对于式(10-10),我们应该按照 k 的(0,4)和(2,6)分为两组,而对于式(10-11),应该按照 k 的(1,5)和(3,7)分为两组。

先对式(10-10)进行分组。当 k 等于0或4的时候,式(10-10)中的每个方括号的计算结果都是一样的,所以,我们可以用两个 B 两项式来表示。当 k 等于2或6的时候,每个方括号内的旋转矢量不像 k 等于0或4那样等于1,而是等于 W_8^4,即 -1。所以,我们得到另外两个 B 两项式。这4个 B 两项式为:

$$\begin{cases} B_{00}(0,2,4,6) = A_0(0,4) + A_0(2,6) \\ B_{00}(1,3,5,7) = A_0(1,5) + A_0(3,7) \end{cases} \quad k = 0,4 \tag{10-12}$$

$$\begin{cases} B_{04}(0,2,4,6) = A_0(0,4) + W_8^4 A_0(2,6) \\ B_{04}(1,3,5,7) = A_0(1,5) + W_8^4 A_0(3,7) \end{cases} \quad k = 2,6 \tag{10-13}$$

对于式(10-11),可以用相同的做法,并得到另外4个 B 两项式:

$$\begin{cases} B_{42}(0,2,4,6) = A_4(0,4) + W_8^2 A_4(2,6) \\ B_{42}(1,3,5,7) = A_4(1,5) + W_8^2 A_4(3,7) \end{cases} \quad k = 1,5 \tag{10-14}$$

$$\begin{cases} B_{46}(0,2,4,6) = A_4(0,4) + W_8^6 A_4(2,6) \\ B_{46}(1,3,5,7) = A_4(1,5) + W_8^6 A_4(3,7) \end{cases} \quad k = 3,7 \tag{10-15}$$

这样，我们就一共得到 8 个 B 两项式。其中，B 两项式下标的第一个数字指出所使用的 A 两项式的下标；第二个数字表示 B 两项式中后一个旋转矢量的指数值；B 两项式括号中的数字依然是 $x(n)$ 的序号。而且，每一对 B 两项式都是由同一对 A 两项式组成的。比如，$B_{42}(1,3,5,7)$ 与 $B_{46}(1,3,5,7)$ 是由 $A_4(1,5)$ 和 $A_4(3,7)$ 组成的。这样，我们就完成了 8 点 FFT 算法的第二步，也就是图 10-1 中的第二步。

在把式(10-12)至式(10-15)代入式(10-10)和式(10-11)中之后，就可以把 $X(k)$ 表示为两个 B 两项式之和：

$$\begin{cases} X(k) = B_{00}(0,2,4,6) + W_8^k B_{00}(1,3,5,7) & k = 0,4 \\ X(k) = B_{42}(0,2,4,6) + W_8^k B_{42}(1,3,5,7) & k = 1,5 \\ X(k) = B_{04}(0,2,4,6) + W_8^k B_{04}(1,3,5,7) & k = 2,6 \\ X(k) = B_{46}(0,2,4,6) + W_8^k B_{46}(1,3,5,7) & k = 3,7 \end{cases} \tag{10-16}$$

这样，我们就用两个 4 点 DFT 合成出了一个 8 点 DFT。

10.1.6 第三步是简单的分裂

在进行第三步之前，我们来观察在 8 点 FFT 算法的这三步计算中，k 是如何被分组的。在第一步中，式(10-6)中方括号内旋转矢量为 W_8^0 和 W_8^{4k}，所以 k 被分为(0,2,4,6)和(1,3,5,7)的 2 组。在第二步中，式(10-10)和式(10-11)中方括号内的旋转矢量为 W_8^0 和 W_8^{2k}，所以 k 被分为(0,4)、(1,5)、(2,6)和(3,7)的 4 组。第三步中的旋转矢量为 W_8^0 和 W_8^k，所以，k 应该被分为从 0 到 7 的 8 个组，即每组一个 k 值。因此，由式(10-16)就可以写出时域抽取 8 点 FFT 的最后表达式：

$$\begin{cases} X(0) = B_{00}(0,2,4,6) + W_8^0 B_{00}(1,3,5,7) \\ X(1) = B_{42}(0,2,4,6) + W_8^1 B_{42}(1,3,5,7) \\ X(2) = B_{04}(0,2,4,6) + W_8^2 B_{04}(1,3,5,7) \\ X(3) = B_{46}(0,2,4,6) + W_8^3 B_{46}(1,3,5,7) \\ X(4) = B_{00}(0,2,4,6) + W_8^4 B_{00}(1,3,5,7) \\ X(5) = B_{42}(0,2,4,6) + W_8^5 B_{42}(1,3,5,7) \\ X(6) = B_{04}(0,2,4,6) + W_8^6 B_{04}(1,3,5,7) \\ X(7) = B_{46}(0,2,4,6) + W_8^7 B_{46}(1,3,5,7) \end{cases} \tag{10-17}$$

与式(10-17)对应的计算步骤就是图 10-1 中 FFT 算法的第三步。

至此，时域抽取 8 点 FFT 算法已经全部完成。图 10-1 就是时域抽取 8 点 FFT 的计算流程。我们把图 10-1 中的计算流程简单解释如下：第一步用 8 个 $x(n)$ 计算出 8 个 A 两项式；第二步用 8 个 A 两项式计算出 8 个 B 两项式；第三步用 8 个 B 两项式计算出 8 个 $X(k)$。

10.2 频域抽取 FFT 算法

在时域抽取 FFT 算法中，我们对输入样点 $x(n)$ 进行时域抽取。在频域抽取 FFT

算法中，我们把输入样点 $x(n)$ 分成前一半和后一半。这里仍然假设 $N=8$。

10.2.1 把一个8点DFT分解为两个4点DFT

一个8点DFT可以写为式(10-1)那样的表达式。在把 $x(n)$ 分成前后两半之后，式(10-1)可改写为：

$$\begin{aligned}X(k) &= \sum_{n=0}^{3} x(n)W_8^{kn} + \sum_{n=4}^{7} x(n)W_8^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{3} x(n)W_8^{kn} + W_8^{4k}\sum_{n=0}^{3} x(4+n)W_8^{kn} \qquad k=0,1,2,\cdots,7\end{aligned} \tag{10-18}$$

因为式(10-18)的后一个连加号前面的旋转矢量为 W_8^{4k}，所以我们把式(10-18)按照 k 的偶数和奇数分成两组。

当 k 为偶数时，式(10-18)中的旋转矢量 $W_8^{4k}=1$，所以式(10-18)变为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_8^{kn} + \sum_{n=0}^{3} x(4+n)W_8^{kn} = \sum_{n=0}^{3} [x(n)+x(4+n)]W_8^{kn} \qquad k=0,2,4,6 \tag{10-19}$$

当 k 为奇数时，式(10-18)中的旋转矢量 $W_8^{4k}=-1$，所以式(10-18)变为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_8^{kn} - \sum_{n=0}^{3} x(4+n)W_8^{kn} = \sum_{n=0}^{3} [x(n)-x(4+n)]W_8^{kn} \qquad k=1,3,5,7 \tag{10-20}$$

在式(10-19)中，因为 k 为偶数，所以我们可以把 W_8^{kn} 写为 $W_8^{2bn}=W_4^{bn}$，其中的 b 从0变到3。因此，式(10-19)表示了 k 为偶数时的一个4点DFT。

式(10-20)的情况是相似的，但这里的 k 是奇数。我们可以把 W_8^{kn} 写为 $W_8^{(k-1)n}W_8^{n}$，而其中的 $W_8^{(k-1)n}$ 与式(10-19)中的 W_8^{kn} 具有相同的值。所以，式(10-20)也是一个4点DFT。从 W_8^{kn} 分解出来的 W_8^{n} 可以看作 $[x(n)-x(4+n)]$ 的一个因子。为了容易观察，我们把式(10-20)写成：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} \left\{[x(n)-x(4+n)]W_8^{n}\right\}W_8^{(k-1)n} \qquad k=1,3,5,7 \tag{10-21}$$

至此，我们把式(10-1)中的一个8点DFT分解成了两个4点DFT，这就是 k 为偶数的式(10-19)和 k 为奇数的式(10-21)。而且，在式(10-19)和式(10-21)的两个4点DFT中，作为输入样点的 $x(n)+x(4+n)$ 和 $x(n)-x(4+n)$ 实际上也是四对2点DFT的输出。比如，$x(0)+x(4)$ 和 $x(0)-x(4)$ 是由输入样点 $x(0)$ 和 $x(4)$ 经过一对2点DFT计算得到的。此外，对于式(10-21)中的那个4点DFT，输入样点 $x(n)-x(4+n)$ 在进行DFT计算之前要乘以因子 W_8^{n}。

10.2.2 把一个4点DFT分解为两个2点DFT

我们现在把式(10-19)和式(10-21)中的两个4点DFT再分别分解成两个2点DFT。我们先把式(10-19)或式(10-21)中的4点DFT改写为下面的形式：

$$Y(l)=\sum_{n=0}^{3} y(n)W_4^{ln} \qquad l=0,1,2,3 \tag{10-22}$$

其中，$y(n)$代表式(10-19)中的 $x(n)+x(n+4)$或者式(10-21)中的$[x(n)-x(n+4)]W_8^n$；旋转矢量也已经改写成了 W_4^{ln}，它等于式(10-19)中的 W_8^{kn} 或式(10-21)中的 $W_8^{(k-1)n}$。

采用与 10.2.1 节相同的方法，我们把式(10-22)按照 l 的奇偶数分为两组：

$$Y(l)=\sum_{n=0}^{1} [y(n)+y(n+2)]W_4^{ln} \qquad l=0,2 \tag{10-23}$$

$$Y(l)=\sum_{n=0}^{1} [y(n)-y(n+2)]W_4^{ln} \qquad l=1,3 \tag{10-24}$$

式(10-24)又可写为：

$$Y(l)=\sum_{n=0}^{1} \left\{[y(n)-y(n+2)]W_4^{n}\right\}W_4^{(l-1)n} \qquad l=1,3 \tag{10-25}$$

这样，我们把式(10-22)中的一个 4 点 DFT 分解成了两个 2 点 DFT，这就是 l 为偶数的式(10-23)和 l 为奇数的式(10-25)。在式(10-23)和式(10-25)的两个 2 点 DFT 中，作为输入样点的 $y(n)+y(2+n)$和 $y(n)-y(2+n)$实际上是一对 2 点 DFT 的输出。比如，$y(0)+y(2)$和 $y(0)-y(2)$是由输入样点 $y(0)$和 $y(2)$经过 2 点 DFT 计算得到的。此外，对于式(10-25)中的 2 点 DFT，输入样点 $y(n)-y(n+2)$在进行 DFT 计算之前都要乘以因子 W_4^n。

10.2.3 频域抽取 8 点 DFT 的综合

根据上面的分析，我们不难画出 8 点 DFT 频域抽取的流程图，如图 10-2 所示。图中的 8 个 A 两项式代表了式(10-19)和式(10-21)中每个方括号内的两项之和，是由 8 个输入样点 $x(n)$通过四对 2 点 DFT 组成的，并可以写为：

$$\begin{cases} A_0(0,4)=x(0)+x(4) \\ A_0(1,5)=x(1)+x(5) \\ A_0(2,6)=x(2)+x(6) \\ A_0(3,7)=x(3)+x(7) \\ A_4(0,4)=x(0)-x(4) \\ A_4(1,5)=x(1)-x(5) \\ A_4(2,6)=x(2)-x(6) \\ A_4(3,7)=x(3)-x(7) \end{cases} \tag{10-26}$$

图 10-2 中的 8 个 B 两项式代表了式(10-23)和式(10-25)中每个方括号内的内容，是用 8 个 A 两项式通过四对 2 点 DFT 组成的，并可以写为：

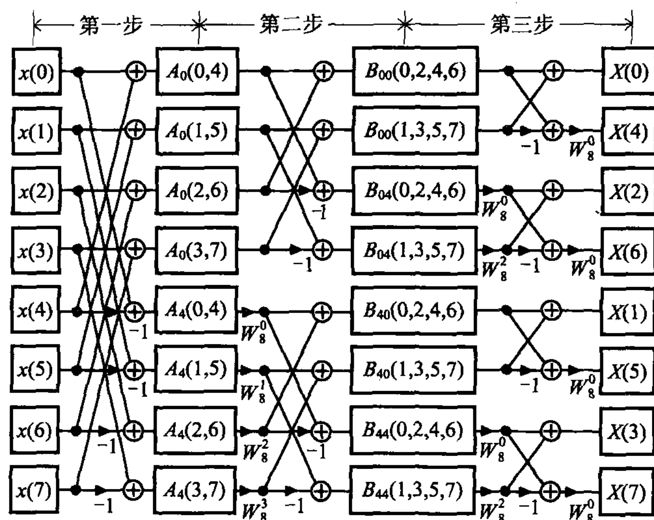


图 10-2　频域抽取 8 点 FFT 算法用三步完成

$$
\begin{cases}
B_{00}(0,2,4,6)=A_0(0,4)+A_0(2,6)\\
B_{00}(1,3,5,7)=A_0(1,5)+A_0(3,7)\\
B_{04}(0,2,4,6)=A_0(0,4)-A_0(2,6)\\
B_{04}(1,3,5,7)=A_0(1,5)-A_0(3,7)\\
B_{40}(0,2,4,6)=A_4(0,4)+W_8^2A_4(2,6)\\
B_{40}(1,3,5,7)=W_8^1A_4(1,5)+W_8^3A_4(3,7)\\
B_{44}(0,2,4,6)=A_4(0,4)-W_8^2A_4(2,6)\\
B_{44}(1,3,5,7)=W_8^1A_4(1,5)-W_8^3A_4(3,7)
\end{cases}
\tag{10-27}
$$

最后由 8 个 B 两项式得到频域抽取 8 点 FFT 的输出：

$$
\begin{cases}
X(0)=B_{00}(0,2,4,6)+B_{00}(1,3,5,7)\\
X(4)=B_{00}(0,2,4,6)-B_{00}(1,3,5,7)\\
X(2)=B_{04}(0,2,4,6)+W_8^2B_{04}(1,3,5,7)\\
X(6)=B_{04}(0,2,4,6)-W_8^2B_{04}(1,3,5,7)\\
X(1)=B_{40}(0,2,4,6)+B_{40}(1,3,5,7)\\
X(5)=B_{40}(0,2,4,6)-B_{40}(1,3,5,7)\\
X(3)=B_{44}(0,2,4,6)+W_8^2B_{44}(1,3,5,7)\\
X(7)=B_{44}(0,2,4,6)-W_8^2B_{44}(1,3,5,7)
\end{cases}
\tag{10-28}
$$

现在可以从图 10-2 中看出所谓“频域抽取”的意思。第一步把 DFT 的输出频率点 k 分为(0,2,4,6)和(1,3,5,7)的两组，这就是图中的上一半和下一半，频率 k 被 2∶1 抽取。第二步把这两组再按奇偶数分为四组：(0,4)、(2,6)、(1,5)、(3,7)，频率 k 被 4∶1抽取。第三步把这四组分裂为八组，每组一个 $X(k)$。由于每次频域抽取都是以 k

的奇偶数进行的，这也就形成了图 10-2 中输出端 $X(k)$的“位逆转”。

10.3 蝶形计算

由上面的时域抽取法的图 10-1 和频域抽取法的图 10-2 可知，FFT 算法中最基本的计算单位是由两个输入复数计算出两个输出复数的一对 2 点 DFT，就像图 10-3 中用 a_0和 a_1计算出 b_0和 b_1。

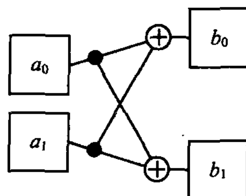


图 10-3 蝶形计算

图 10-4 表示了时域抽取法与频域抽取法的蝶形计算。在 10-4a 的时域抽取蝶形计算中，在把复数 a_1加到复数 b_0和 b_1之前，先要使 a_1分别乘以旋转矢量 W_8^m和 W_8^{4+m}。而这个蝶形计算可以容易地变为图 10-4b 的频域抽取蝶形计算。蝶形计算还有其他一些表示法，但都是利用了旋转矢量的周期性和对称性的特点。

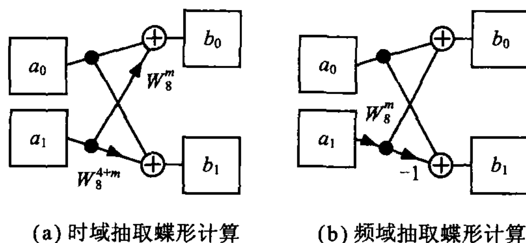


图 10-4 时域抽取与频域抽取的蝶形计算

10.4 位逆转

从图 10-1 和图 10-2 中还可以看出 FFT 算法的另一个特点——位逆转。在时域抽取的图 10-1 中，在进行 FFT 计算之前，输入序列 $x(n)$的顺序必须要“位逆转”，比如，把 $x(4)$放在原本应该是 $x(1)$的位置上，因为 $x(4)$的序号“100”位逆转后是“001”。同样，在频域抽取的图 10-2 中，当 FFT 计算完成后，$X(k)$的顺序是“位逆转”的。这些 $X(k)$必须被“位逆转”回来后，才有正常的顺序。表 10-1 给出了 8 点 FFT 的序号在位逆转前后的对照。

表 10-1　8 点 FFT 的位逆转

原来序号	位逆转后序号	原来序号	位逆转后序号
000	000	100	001
001	100	101	101
010	010	110	011
011	110	111	111

此外，表 10-2 和表 10-3 给出了用随意的一组实际数据作为输入样点进行时域抽取和频域抽取 8 点 FFT 计算而得到的中间数据和最后结果。

表 10-2　时域抽取 8 点 FFT 计算的中间数据和最后结果

n	$x(n)$		位逆转后		A 两项式		B 两项式		$X(k)$	
	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部
0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.600	0.000	1.950	0.000	2.400	0.000
1	0.500	0.000	0.600	0.000	0.400	0.000	0.400	−0.150	1.496	−0.185
2	0.250	0.000	0.250	0.000	0.350	0.000	1.250	0.000	1.250	0.050
3	−0.250	0.000	0.100	0.000	0.150	0.000	0.400	0.150	−0.696	0.115
4	0.600	0.000	0.500	0.000	0.200	0.000	0.450	0.000	1.500	0.000
5	−0.300	0.000	−0.300	−0.566	0.800	0.000	0.800	0.750	−0.696	−0.115
6	0.100	0.000	−0.250	−0.150	0.250	0.050	−0.050	0.000	1.250	−0.050
7	0.500	0.000	0.500	0.530	−0.750	0.000	0.800	−0.750	1.496	0.185

表 10-3　频域抽取 8 点 FFT 计算的中间数据和最后结果

n	$x(n)$		A 两项式		B 两项式		$X(k)$		位逆转后	
	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部
0	1.000	0.000	1.600	0.000	1.950	0.000	2.400	0.000	2.400	0.000
1	0.500	0.000	0.200	0.000	0.450	0.000	1.500	0.000	1.496	−0.185
2	0.250	0.000	0.350	0.000	1.250	0.000	1.250	0.050	1.250	0.050
3	−0.250	0.000	0.250	0.000	−0.050	0.000	1.250	−0.050	−0.696	0.115
4	0.600	0.000	0.400	0.000	0.400	−0.150	1.496	−0.185	1.500	0.000
5	−0.300	0.000	0.800	0.000	1.096	−0.035	−0.696	−0.115	−0.696	−0.115
6	0.100	0.000	0.150	0.000	0.400	0.150	−0.696	0.115	1.250	−0.050
7	0.500	0.000	−0.750	0.000	0.035	−1.096	1.496	0.185	1.496	0.185

10.5　超过 8 点的 FFT 算法

FTT 算法的点数可以远远超过 8 点，比如 1024 点、65 536 点等，但 FFT 的点数都

一定是 2 的整次幂(对于常用的以 2 为基的 FFT 而言)。当 FFT 的点数增加后,FFT 的计算步数也就相应增加。比如,8 点 FFT 用了三步;到了 1024 点 FFT,就增加到 10 步,因为 $1024=2^{10}$。我们用 16 点的 FFT 算法作为例子,来说明超过 8 点的 FFT 是如何计算的。先讨论时域抽取 16 点 FFT,然后讨论频域抽取 16 点 FFT。

10.5.1 时域抽取 16 点 FFT 算法

根据 DFT 公式(9-6),16 点 DFT 的算法为:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{kn}\quad k=0,1,2,\cdots,15 \tag{10-29}$$

其中,旋转矢量 $W_{16}^{kn}=\exp(-j2\pi kn/16)$。

对式(10-29)做时域抽取:

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=0}^{7}x(2n)W_{16}^{2kn}+\sum_{n=0}^{7}x(2n+1)W_{16}^{k(2n+1)}\\&=\sum_{n=0}^{7}x(2n)W_{16}^{2kn}+W_{16}^{k}\sum_{n=0}^{7}x(2n+1)W_{16}^{2kn}\end{aligned} \tag{10-30}$$

由于 $W_{16}^{2kn}=W_{8}^{kn}$,上式可以改写为:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(2n)W_{8}^{kn}+W_{16}^{k}\sum_{n=0}^{7}x(2n+1)W_{8}^{kn}\qquad k=0,1,2,\cdots,15 \tag{10-31}$$

上式右边的两个连加运算都是在计算一个 8 点 DFT,其中的 $x(n)$ 以序号的偶数和奇数分为两组。这样就把一个 16 点 DFT 变成了两个 8 点 DFT。根据式(10-31),我们画出了 16 点 FFT 的示意性的计算流程图,如图 10-5 所示。

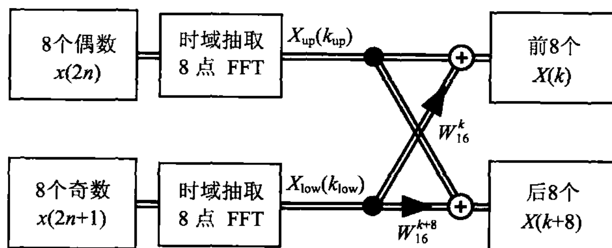


图 10-5 时域抽取 16 点 FFT 算法示意图

下面具体说明如何计算这个 16 点 FFT 中的任意一个输出 $X(k)$。比如,我们想计算其中的 $X(9)$,就可以根据式(10-31)写出下面的演算过程:

$$\begin{aligned}X(9)&=\sum_{n=0}^{7}x(2n)W_{8}^{9n}+W_{16}^{9}\sum_{n=0}^{7}x(2n+1)W_{8}^{9n}\\&=\sum_{n=0}^{7}x(2n)W_{8}^{1n}+W_{16}^{9}\sum_{n=0}^{7}x(2n+1)W_{8}^{1n}\\&=X_{up}(1)+W_{16}^{9}X_{low}(1)\end{aligned}$$

$$= X_{up}(1) - W_{16}X_{low}(1) \tag{10-32}$$

其中，$X_{up}(1)$为图10-5中上面那个8点FFT的8个输出中的第二个，而$X_{low}(1)$表示下面那个8点FFT的8个输出中的第二个。然后，从$X_{up}(1)$中减去$W_{16}X_{low}(1)$，就得到$X(9)$。其实，式(10-32)中的$X(9)$的计算过程是与图10-1中从第二步的$B_{42}(0,2,4,6)$和$B_{42}(1,3,5,7)$计算出$X(5)$一样的。根据上面的分析，我们不难推导出任意2^N点FFT的时域抽取算法。

10.5.2　频域抽取16点FFT算法

根据式(9-6)，一个16点DFT为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{15} x(n)W_{16}^{kn} \qquad k = 0,1,2,\cdots,15 \tag{10-33}$$

按照10.2节的分析方法，把$x(n)$分为前后两半：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_{16}^{kn} + W_{16}^{8k}\sum_{n=0}^{7} x(n+8)W_{16}^{kn} \qquad k = 0,1,2,\cdots,15 \tag{10-34}$$

当k为偶数时，上式变为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} [x(n) + x(n+8)]W_{16}^{kn} \qquad k = 0,2,4,\cdots,14 \tag{10-35}$$

当k为奇数时，式(10-34)变为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} [x(n) - x(n+8)]W_{16}^{kn} \qquad k = 1,3,5,\cdots,15 \tag{10-36}$$

而上式又可以改写为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} \left\{[x(n) - x(n+8)]W_{16}^{n}\right\}W_{16}^{(k-1)n} \qquad k = 1,3,5,\cdots,15 \tag{10-37}$$

式(10-35)和式(10-37)是两个频域抽取8点DFT。所以，我们已经把一个16点DFT分解成了两个8点DFT。图10-6表示了16点DFT的示意性的计算流程。

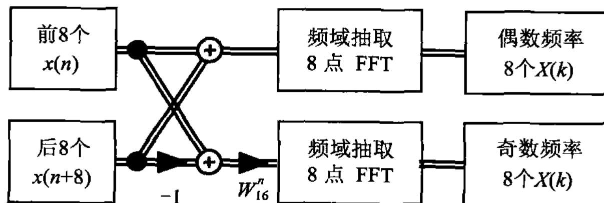


图10-6　频域抽取16点FFT的算法示意图

10.6　FFT的计算顺序

FFT的计算顺序是非常简单的，先对输入样点施加恰当的窗函数。如果使用时域

抽取法，就要把输入样点位逆转，然后做FFT，最后得到的$X(k)$就是FFT的输出频谱。如果使用频域抽取法，那么，位逆转应该放在FFT之后。FFT的计算流程图示于图10-7中。

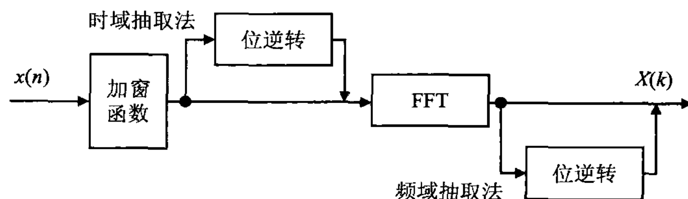


图 10-7 FFT算法的流程图

FFT反变换的算法是与FFT一样的。需要注意的唯一不同点是，FFT反变换时的旋转矢量W_N^{-km}有相反的旋转方向。

小结

- ❑ FFT仅仅是DFT的一种快速算法。FFT的基本思路是“分而治之”，它的基本技巧是利用了DFT中旋转矢量W_N^{km}的周期性和对称性。
- ❑ FFT算法可以分为时域抽取和频域抽取两种。
- ❑ 时域抽取法是通过对$x(n)$进行时域抽取完成的。
- ❑ 频域抽取法是通过把$x(n)$分为前后两半完成的。
- ❑ 两种算法最基本的计算单位都是蝶形计算。但两者的位逆转分别在起始端和结束端。
- ❑ 由8点FFT算法可以扩展到2的任意次幂点的FFT算法。
- ❑ FFT反变换算法与FFT算法的唯一不同点是旋转矢量方向相反。
- ❑ 在进行FFT计算之前，施加恰当的窗函数是非常重要的。

习题

10.1 利用图10-1的时域抽取计算框图，计算下面序列的FFT，并利用FFT的结果计算FFT反变换。

(1) $x(n)=\{1,1,0,0,\ 0,0,0,1\}$

(2) $x(n)=\{0,0,1,0,\ 0,0,-1,0\}$

10.2 利用图10-2的频域抽取计算框图，计算下面序列的FFT。

(1) $x(n)=\{1,1,0,0,\ 0,0,0,1\}$

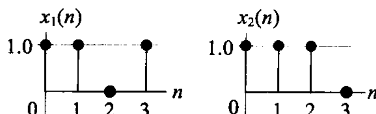
(2) $x(n)=\{0,0,1,0,\ 0,0,-1,0\}$

10.3 用3点DFT为基本计算单位，导出9点DFT时域抽取的FFT算法，并画出算法框图。

10.4　用4点DFT为基本计算单位，导出16点DFT时域抽取的FFT算法。

10.5　当FIR滤波器的冲击响应很长时（比如对大厅的混响效果进行模拟），可以用FFT来完成滤波器的卷积运算，这叫“快速卷积”。但是，利用FFT完成的卷积一定是循环卷积，而我们需要的是线性卷积。解决的方法是对两个FFT输入序列补零，使样点数增加一倍，再通过FFT、FFT反变换和恰当的叠加，就可得到线性卷积。

对下面的两个4样点序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，要求画出它们的线性卷积，以及画出将它们补零到8点之后的循环卷积，并比较这两个结果是否一致。



10.6　对练习题10.5中提出的快速卷积方案，试画出用FFT和FFT反变换实现快速卷积的结构框图，确定框图中的主要参数，并注意思考如何解决快速卷积得到两倍样点数的问题。

练习题参考答案

第1章

1.1　偶对称。

1.3　$b_n=2(n\pi)^{-1}[1-\cos(n\pi/2)]$。

1.4　(1) 20 ms,4.5；　(2) 20 ms,5.84；　(3) 13.3 ms,0.5。

1.5　(1) 0.1；　(2) 15；　(3) 1。

1.6　(1) 功率信号,1；　(2) 能量信号,0.071；　(3) 都不是。

1.7　(1) 0,因为平均值为零；

　　(2) 0,因为偶对称；

　　(3) 实数,因为 $b_n=0$。

第3章

3.1　(2) ① 能够恢复,② 不能恢复,③ 不能恢复。

3.2　(2) 40 Hz 和 50 Hz。

3.3　(1) 幅度谱=0.5，　(2)和(3)的幅度谱=0。

3.4　−20 dB/倍频程。

3.5　(1) 幅度谱等于零,因为互相抵消；　(2) 幅度谱等于 0.5；

　　(3) 幅度谱等于零,因为互相抵消。

3.6　可以采用 20 ksps 的采样率和截止频率等于 7 kHz 的抗混叠低通滤波器。

第4章

4.1　(1) $X(z)=1.2-1.3z^{-1}+0.5z^{-2}+2.6z^{-3}$；

　　(2) $X(z)=1+2.5z^{-1}+0.8z^{-2}-0.8z^{-3}+1.5z^{-4}+2.2z^{-5}$。

4.2　$X(z)=(1-a^Nz^{-N})/(1-az^{-1}),z\neq a$。

4.3　(1) $x(n)=\{1,5,0,-1.8,0,-3\}$；　(2) $x(n)=\{4,-2,0.25\}$；

　　(3) $x(n)=\{2,-2,-2,-0.2,0,-3.6\}$。

4.4　(1) $x(0)=x(1)=0,x(n)=3\times0.8^{n-2},n>1$；　(2) $x(n)=0.5^n+(-0.7)^n$。

4.7　(提示:用单位复指数信号代替 a^n。)

第5章

5.1　$x(n)=\{0,1,2,2,1,0,-1,-1,0,0,0,0,-1,-2,-1\}$。

5.2　$x(n)=\{1,-1,2,-2,3,-3,3,-3,1,-2,2,0,0,1,-1\}$。

5.3 (1) $H(z)=(1+2z^{-1})/(1+0.6z^{-1})$, $h(n)=(-0.6)^n+2(-0.6)^{(n-1)}-2(-0.6)^{-1}\delta(n)$； (2) $H(z)=1+z^{-2}$, $h(n)=\{1,0,1,0,0,\cdots\}$。

5.4 (1) $H(e^{j\Omega})=2e^{-j(\Omega-\pi/2)}\sin(\Omega)$； (2) $H(e^{j\Omega})=2e^{-j\Omega}[1+\cos(\Omega)]/(1-0.5e^{-j\Omega})$。

5.5 (1) $|H(e^{j0})|=2.5$, $|H(e^{j\pi})|=0.625$； (2) $|H(e^{j0})|=3$, $|H(e^{j\pi})|=1/3$。

5.7 (1) $H(e^{j\pi/2})=1/(0.7+j0.3)$； (2) $H(e^{j\pi/2})=(1-j3)/(1+j0.1)$。

5.8 (1) $|H(e^{j\pi/4})|=2.8/0.74$； (2) $|H(e^{j\pi/4})|=1/(0.77\times0.87)$。

5.9 (1) $z_z=1$, $z_{p1}=0$, $z_{p2}=-1$；

(2) $h(0)=0$, $h(1)=1$；在 $n>1$ 时，$h(n)=-2(-1)^{n-2}$；

(3) 不稳定。

5.10 $a_1=-0.5$, $a_2=0.5$。

5.11 $H(e^{j\Omega})=b/(1-0.5e^{-j\Omega})$, $\Omega=0$, $b=0.5$。

5.12 (1) $|H(e^{j0})|=0.69$； (2) $|H(e^{j\pi/2})|=1/(1.02\times1.28)$； (3) $|H(e^{j\pi})|=4.17$。

5.13 (1) $|A|<1$；(2) $|A|<1$。

第6章

6.1 $H(z)=0.5(1+z^{-1})$, $H(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega/2}\cos(\Omega/2)$。

6.2 $b=(0.713\times1.665)^2/(0.765\times1.848)^2$；$z_{zk}=e^{jk\pi/2}$, $z_{pk}=0.8e^{jk\pi/2}$, $k=0,1,2,3$；$|H(e^{j\Omega})|=1.42\sin(2\Omega)/(1-0.41e^{-j4\Omega})$。

6.3 (1) 当 $n<5$ 时，$h(n)=0.0285n$；当 $4<n<7$ 时，$h(n)=0.1429$；当 $6<n<11$ 时，$h(n)=0.1429-0.0285(n-6)$。

(2) 滤波器延迟了 5 个样点时间。

(3) 滤波器没有极点，零点有 10 个，均匀分布在 5 等分与 7 等分的圆周上，但直流零频上没有零点。

6.4 (2) 零频；$b=(1-c)/2$； (3) $c=1.0-0.02\pi$。

6.5 (1) 不稳定，因为两个极点 $z_{p1}=1.2$ 和 $z_{p2}=-1.1$ 都在单位圆之外。

(2) $H(z)=0.909\times0.833\times(1+2z^{-1}+z^{-2})/[(1+0.9091z^{-1})(1-0.833z^{-1})]$。

(3) $H(e^{j\Omega})=0.909\times0.833\times4e^{j\Omega}\cos^2(\Omega/2)/[(1+0.9091e^{-j\Omega})(1-0.833e^{-j\Omega})]$。

第7章

7.4 $H(z)=(4+1.6z^{-1})/(1+0.3z^{-1})$。

7.5 $w_1(n)=x(n)-0.1w_1(n-1)$, $v_1(n)=w_1(n)+6w_1(n-1)$, $w_2(n)=v_1(n)+0.2w_2(n-1)$, $v_2(n)=w_2(n)+4w_2(n-1)$,

$y(n)=v_2(n)+3v_2(n-1)$；$H(z)=[(1+6z^{-1})(1+4z^{-1})(1+3z^{-1})]/[(1+0.1z^{-1})(1-0.2z^{-1})]$。

7.6 $y(n)=4x(n)+8x(n-2)+4x(n-4)$。$H(z)=4+8z^{-2}+4z^{-4}$。$h(n)=\{4,0,8,0,4,0,0,\cdots\}$。

7.7 $H(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega}[2\cos(\Omega)-1]$。

7.8 $H(z)=(1+0.5z^{-1})/(1-0.5z^{-1})$。$h(n)=2(0.5)^n-\delta(n)$，或者 $h(n)=\{1,1,$

0.5,0.25,0.125,0.0625,…}。

7.9 $z_{z1}=e^{j\pi/2}$, $z_{z2}=e^{j3\pi/2}$, $z_{p1}=0.8e^{j\pi/2}$, $z_{p2}=0.8e^{j3\pi/2}$。$|H(e^{j0})|=1.414/1.28$; $|H(e^{j\pi/2})|=0$。

7.11 (2) $H(e^{j\Omega})=(e^{-j\Omega}-0.98)/(1-0.98e^{-j\Omega})$; (3) 不会。

7.12 $H(z)=0.245(1+z^{-1})/(1-0.51z^{-1})$。

7.13 (1) 带通; (2) 高通; (3) 带阻; (4) 低通。

第8章

8.1 可以用5:1的抽取把采样率降到1600 Hz之后就可以提取基频了。

8.2 (1) 如图8-20b那样,但信号频率低一半。

(2) 如图8-19b所示,但每周期内应有8个样点。

(3) 0.139。

(4) 略大于$\omega_S/4$。

8.3 应该合成出一个幅度等于1的直流电平。

第9章

9.1 (1) $X(k)$={实部:1.00,−0.71,0.00,0.71,−1.00,0.71,0.00,−0.71;虚部:0.00,−0.71,1.00,−0.71,0.00,0.71,−1.00,0.71}。

(2) $X(k)$={实部:0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00;虚部:0.00,−4.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,4.00}

9.2 $X(1)=4.0$,$X(7)=4.0$,其他$X(k)$都等于零。

9.3 (1) $x_2(n)$;

(2) $x_1(n)$;

(3) $x_1(n)$、$x_4(n)$。

9.7 [提示:把$X(l)$和$Y(k-l)$表示为$x(n)$和$y(n)$的DFT。]

第10章

10.1 (1)位逆转{1,0,0,0,1,0,0,1};第一步{1,1,0,0,1,1,1,−1};第二步{1,1,1,1,2,1+j,0,1−j};第三步{3,2.4,1,−0.4,−1,−0.4,1,2.4}。

(2)位逆转{0,0,1,−1,0,0,0,0};第一步{0,0,0,2,0,0,0,0};第二步{0,−j2,0,j2,0,0,0,0};第三步{0,−j2,0,j2,0,−j2,0,j2}。

10.2 (1) 第一步{1,1,0,1,1,1,0,−1};第二步{1,2,1,0,1,1.4,1,−j1.4};第三步{3,−1,1,1,2.4,−0.4,−0.4,2.4};位逆转{3,2.4,1,−0.4,−1,−0.4,1,2.4}。

(2) 第一步{0,0,0,0,0,0,2,0};第二步{0,0,0,0,−j2,0,j2,0};第三步{0,0,0,0,−j2,−j2,j2,j2};位逆转{0,−j2,0,j2,0,−j2,0,j2}。

10.5 两者的结果是一样的。

10.6 (提示:FFT的输入序列有N个样点,输出有$2N$个样点,所以,应该把这$2N$个输出样点分成两半,并分别与前面和后面两次计算得出的$2N$个样点叠加。)

参 考 文 献

[1] (美)R. E. ZIMMER, W. H. TRANTER, D. R. FANNIN 著. *Signal and Systems: Continuous and Discrete*, *2nd edition*. 纽约:Maxwell Macmillan, 1990

[2] (美)L. B. JACKSON 著. *Digital Filters and Signal Processing*. 波士顿:Kluwer Academic Publishers, 1986

[3] (美)A. A. KHAN 著. *Digital Signal Processing Fundamentals*. 波士顿:DA Vinci Engineering Press, 2005

[4] (美)B. A. SHENOI 著. *Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design*. 纽约:John Wiley & Sons, Inc., 2006

[5] (美)J. G. PROAKIS, D. G. MANOLAKIS 著. *Digital Signal Processing Principles*, *Algorithms and Applications*, *3th edition*. 纽约:Prentice-Hall PTR, 2004

[6] (美)R. G. LYONS 著. *Understanding Digital Signal Proce ssing*, *2nd edition*. 纽约:Prentice-Hall PRT, 2004

[7] (美)ANDREAS ANTONIOU 著. *Digital Signal Processing*. 纽约:McGraw-Hill Companies, Inc., 2006

[8] (美)L. R. RABINER, B. GOLD 著. *Theory and Applications of Digital Signal Processing*. 纽约:Printice-Hall,1975

[9] (美)A. V. OPPENHEIM, R. W. SCHAFER 著. *Discrete-Time Signal Processing*. 纽约:Prentice-Hall, 1975

[10] (美)T. W. PARKS, C. S. BURRUS 著. *Digital Filter Design*. 纽约:Wiley-Interscience, 1987

[11] (美)S. K. MITRA 著. *Digital Signal Processing-A Computer-Based Approach*. 纽约:Wiley-Interscience, 1993

[12] (美)E. C. IFEACHOR, B. W. JERVIS 著. *Digital Signal Processing*. 纽约:Prentice-Hall, 2002

[13] (美)W. D. STANLEY, G. R. DOUGHERTY and R. DOUGHERTY, *Digital Signal Processing*, *2nd edition*. 弗吉尼亚:Reston Publishing Company, 1984

索　　引

Z

基本符号表

f	频率
f_C	截止频率
f_0	信号频率、信号基频
f_B	信号带宽、滤波器带宽
f_S	采样频率
T	采样周期
T_0	信号周期
a_n	傅里叶级数余弦分量的系数
b_n	傅里叶级数正弦分量的系数
$x(t)$	连续时域信号
X_n	$x(t)$的复指数形式傅里叶级数的系数
$X(f)$	$x(t)$的傅里叶变换
$x(n)$	离散时域系统的输入序列
$y(n)$	离散时域系统的输出序列
$x_S(t)$	已采样信号
$p(t)$	采样脉冲函数
$X_S(f)$	$x_S(t)$的傅里叶变换
$X(z)$	$x(n)$的 z 变换
$Y(z)$	$y(n)$的 z 变换
z^{-1}	单位延迟
$h(n)$	离散时域系统的单位冲击响应

$H(z)$ 离散时域系统的传递函数

z_z 零点

z_p 极点

r 复数的模

n 序号、DFT 输入样点的序号

k 序号、DFT 输出频率点的序号

N 样点总数

$X(k)$ $x(n)$的 DFT 输出

W_N DFT 的旋转因子

W_N^{kn} DFT 的旋转矢量

$w(n)$ 窗函数

$W(z)$ $w(n)$的 z 变换

ω 角频率

ω_0 信号频率、信号基频

ω_B 信号带宽、滤波器带宽

ω_S 采样频率

ω_C 截止频率

Ω 归一化频率

Ω_S 归一化采样频率(等于 2π)

θ 相位、幅角

$\delta(t)$ 单位冲击函数

$\delta(n)$ 单位脉冲序列

简明数字信号处理

近年来，数字信号处理 (DSP) 发展迅速，已经广泛应用于通信、电子、自动控制等领域。但是，DSP原理涉及复杂的数学公式和推导过程，以晦涩难懂而著称，让很多年轻工程师望而生畏。

本书专门针对这一现状而撰写，作者将自己30多年研发工作中总结的信号处理方面的宝贵经验和真知灼见都凝聚其中，创造了一种简单易懂的阐述方式，用简明的语言和直观的图表解释DSP技术最基本和最必需的概念和内容，化繁为简，直指问题本质。书中着重描述了信号最小单位的复指数信号，并从多个侧面介绍了傅里叶级数、复指数、信号正交性、卷积等重要概念，对信号处理中比较难以理解的相位问题也做了详细叙述。

通过本书，读者能够迅速掌握DSP技术，具备独立完成DSP开发的能力。

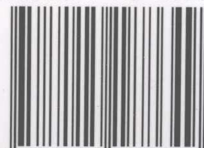
姚剑清 北京微电子技术研究所研究员，毕生从事计算机硬软件开发、语音识别与语音编码和CMOS混合信号电路设计工作。主要研究方向包括基于HMM的语音识别和MELP语音编码技术，ΔΣ、两步并行和流水ADC/DAC电路。译著有《锁相环技术（第3版）》（人民邮电出版社）。



延伸阅读

- 数字信号处理：工程师和研究人员的实用指南　Steven W. Smith（即将出版）




ISBN 978-7-115-18864-9
9 787115 188649 >
ISBN 978-7-115-18864-9/TN
定价：29.00 元

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 88593802
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

分类建议 电子电气/信号处理

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn